

*TSFS06 Diagnos och övervakning*  
*Föreläsning 4 - Linjär residualgenerering och*  
*detekterbarhet*

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik  
Linköpings universitet  
`erik.frisk@liu.se`

2024-04-05

# Översikt

---

- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

### Definition

Ett propert linjärt filter  $R(p)$  är en residualgenerator för observationsmängden  $\mathcal{O}$  och  $r = R(p)z$  en residual om

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$$

- En residualgenerator är inte nödvändigtvis känslig för fel.
- $r = 0$  är alltid en residualgenerator, men en smula värdelös.
- Metod för att hitta **alla**, sedan kan man välja bland dem de som har bäst prestanda, med avseende på till exempel detekterbarhetsprestanda.

Förra föreläsningen visades att för en modell

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

så kan alla residualgeneratorer skrivas  $r = R(p)z$  där

$$R(p) = d^{-1}(p)\gamma(p)N_H(p)L(p)$$

- designfrihet i  $d(p)$  och  $\gamma(p)$ .
- $d(s)$  stabil och med gradtal större eller lika med täljarens  $\gamma(s)N_H(s)L(s)$  gradtal.

- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

## *Introducerande exempel: linjär modell av flygplan*

---

Modellen är en linjäriserad modell av ett flygplan i en arbetspunkt.  
Insignaler och utsignaler:

Inputs	Outputs
$u_1$ : spoiler angle [tenth of a degree]	$y_1$ : relative altitude [m]
$u_2$ : forward acceleration [ $\text{ms}^{-2}$ ]	$y_2$ : forward speed [ $\text{ms}^{-1}$ ]
$u_3$ : elevator angle [degrees]	$y_3$ : Pitch angle [degrees]

Fel: tre sensorfel ( $f_1$ ,  $f_2$ , and  $f_3$ ), och tre aktuatorfel ( $f_4$ ,  $f_5$ , and  $f_6$ ).  
Modellen är en tillståndsbeskrivning med 5 tillstånd. Felmodellering:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = G(p) \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

## Designproblem

---

Konstruera en residualgenerator  $R(p)$  så att fel aktuator 3 ej påverkar residualen:

$l$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$r$	X	X	X	X	X	0

Definiera vektorerna  $f$  och  $d$  som:

$$z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} \quad d = f_6$$

$5 + 3 = 8$  ekvationer och  $5 + 1 = 6$  signaler som ska avkopplas  $\Rightarrow$  dimension  $8 - 6 = 2$  på rummet av residualgeneratorer.

Modellen är given på tillståndsform och beräkningar i MATLAB ger

$$N_H(s)L(s) = \begin{bmatrix} 0.0705s & s + 0.0538 & 0.091394 & 0.12 & -1 & 0 \\ 22.7459s^2 + 14.5884s & -6.6653 & s^2 - 0.93678s - 16.5141 & 31.4058 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionen 2 som väntat  $\Rightarrow$  det finns exakt två linjärt oberoende residualgeneratorer där  $d = f_6$  är avkopplat.

Uttrycken  $N_H(p)L(p)z = 0$  svarar alltså mot relationerna

$$0.0705\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + 0.0538y_2 + 0.091394y_3 + 0.12u_1 - u_2 = 0$$

$$22.7459\ddot{y}_1 + 14.5884\dot{y}_1 - 6.6653y_2 + \\ + \ddot{y}_3 - 0.93678\dot{y}_3 - 16.5141y_3 + 31.4058u_1 = 0$$

Men eftersom derivator av  $y$  etc. ej är kända måste vi lägga till dynamik.



Välj första raden i basen, dvs.  $\gamma = [1 \ 0]$ :

$$\gamma(p)N_H(p)L(p) = [0.0705p \quad p + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

En realiserbar residualgenerator är då till exempel:

$$R(s) = \frac{1}{1+s} [0.0705s \quad s + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

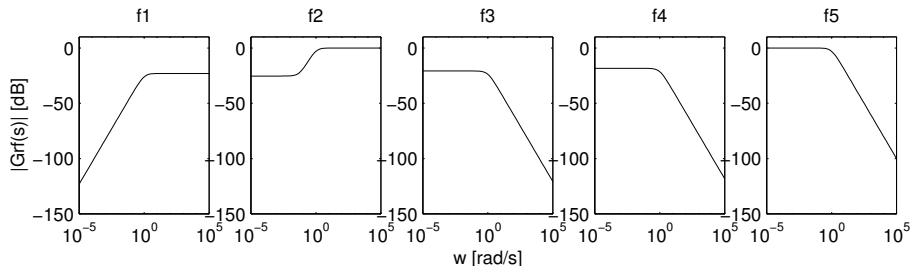
Notera 0 i förstärkning från  $u_3$ , dvs avkoppling av  $f_6$ .

En tillståndsbeskrivning av residualgeneratoren kan visas vara

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -w + [-0.0705 \quad -0.9462 \quad 0.0914 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0] z \\ r &= w + [0.0705 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] z\end{aligned}$$

vilken är enkel att implementera i en dator.

Prestanda kan utvärderas på många sätt, återkommer till det senare i kursen.



- Lågfrekvensprestanda för  $f_1$
- Högfrekvensprestanda för  $f_3$ ,  $f_4$ , samt  $f_5$
- Förstärkningen, säger den något? Fel-till-brus-förhållande.

## Överföringsfunktion från fel till residual

---

För modellen

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

så har residualgeneratoren

$$R(p) = \frac{1}{d(p)} \gamma N_H(p) L(p) z$$

överföringsfunktionen

$$G_{rf}(s) = -\frac{1}{d(s)} \gamma N_H(s) F(s)$$

från fel till residual.

Hur kan man forma  $G_{rf}(s)$  via  $d(s)$  och  $\gamma$ ? Vad är möjligt?

- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

En fråga: Hur många linjärt oberoende residualgeneratorer finns det? (grad av redundans i modellen)

$$y_1 = x$$

$$y_2 = x$$

$$y_3 = x$$

$$y_4 = x$$

Här kan alla parvis jämförelser (6 st) skapa en residual

$$r = y_i - y_j$$

men modellen har redundans 3. Alla residualer kan skrivas som linjärkombination av

$$r_1 = y_1 - y_2$$

$$r_2 = y_2 - y_3$$

$$r_3 = y_3 - y_4$$

dvs.

$$r = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 + \gamma_3 r_3$$

En fråga: Hur många linjärt oberoende residualgeneratorer finns det? (grad av redundans i modellen)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

Genom direkt insättning får vi exempelvis

$$e_1 : \dot{y}_1 + y_1 - u = 0$$

$$e_2 : \dot{y}_2 + y_2 - y_1 = 0$$

Vi kan också få

$$e_3 : \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + y_2 - u = 0$$

Den tredje fås genom  $e_3 = (p + 1)e_2 + e_1$

**En fråga:** Hur många linjärt oberoende residualgeneratorer finns det? (grad av redundans i modellen)

Då alla residualgeneratorer kan skrivas

$$R(s) = \frac{1}{d(s)} \gamma(s) N_H(s) L(s)$$

så ser man att rummet av residualgeneratorer spänns upp av

$$N_H(s) L(s)$$

dvs. dimensionen ges av antalet oberoende rader i  $N_H(s)$  som enligt dimensionssatsen ges av

$$\begin{aligned} n_r &= \text{rader i } H(s) - \text{Rank } H(s) = \\ &= \# \text{ ekvationer} - \# \text{ oberoende obekanta.} \end{aligned}$$

För en tillståndsmodell blir detta  $n_r = n_y - n_d$ .

$$n_r = n_y - n_d = \# \text{ givare} - \# \text{ oberoende störningar.}$$

## *Hur många signaler kan avkopplas i residualen*

---

- Hur många signaler kan vi avkoppla i en residual?
- Samma fråga är: hur många nollor kan vi införa i en rad i

residualstrukturen		$f_1$	$f_2$	$f_3$
	$r_1$	X	0	X

Svaret är att  $n_r > 0$ , dvs.

$$\text{rader i } H(s) > \text{Rank } H(s)$$

vilket är ganska naturligt. Antalet ekvationer måste vara större än antalet signaler vi vill avkoppla.

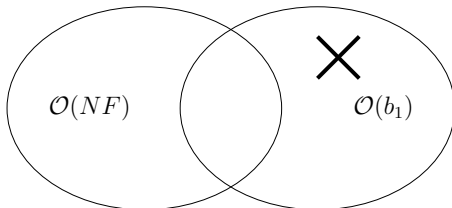


- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

### Detekterbarhet

Mod  $b_i$  (svarande mot felsignal  $f_i$ ) är detekterbar i en modell om

$$\mathcal{O}(b_i) \not\subseteq \mathcal{O}(NF)$$



Här är mod  $b_1$  detekterbar

- Detekterbarhet i stokastiska modeller ej samma sak.
- Detekterbarhet en modellegenskap. Är observationerna, då  $f \neq 0$ , möjliga att skilja från fallet då  $f = 0$ ?

## Felkänslighet i en residual

För en modell och residualgenerator

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

### Felkänslighet

En residual från en residualgenerator  $R(p)$  är känslig för fel  $i$  om  $G_{rf_i}(s) \neq 0$ , dvs. om

$$G_{rf}(s) = -\frac{1}{d(s)}\gamma N_H(s)F_i(s) \neq 0$$

- Skilj på detekterbarhet och känslighet för ett fel i en specifik residual.
- Testa ett fel i taget!

### Teorem

*Ett fel är detekterbart om och endast om det existerar en residual känslig för felet.*

## Skillnad mellan detekterbarhet och felkänslighet

---

I systemet

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+2} \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

är båda felen detekterbara. För residualgeneratoren

$$r = y_1 - \frac{1}{p+1} u = f_1$$

så gäller att

$$G_{rf_1}(s) = 1, \quad G_{rf_2}(s) = 0$$

- ⇒ Det går och konstruera residualer så alla detekterbara fel kan detekteras med någon residual.
- ⇐ Vi kan visa detekterbarhet av ett fel genom att konstruera en residual som är känsligt för det felet.

## *Hur avgör man om ett fel är detekterbart?*

---

För att illustrera den enkla principen, betrakta tillståndsformen

$$\dot{w} = Aw + Bu + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} f$$
$$y = w$$

Eftersom alla tillstånd mäts så är felet detekterbart om det går att särskilja från störningen  $d$

$$\text{Im} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \not\subseteq \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{Rank} \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 2 & c_2 \end{bmatrix} > \text{Rank} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Naturligt: felet är detekterbart om  $c_2 \neq 2c_1$ .

Ett fel är detekterbart om dess påverkan på systemet kan särskiljas från inverkan av okända signaler

## Generellt detekterbarhetstest

Betrakta endast fel  $i$ , dvs. modellekvationen är

$$H(p)x + L(p)z + F_i(p)f_i = 0$$

där  $[H(s) \ L(s)]$  har full radrang för alla  $s \in \mathbb{C}$ . Detta är inte uppfyllt om felmodeller används som t ex  $\dot{f}_i = 0$ .

På samma sätt som i exemplet är  $f_i$  detekterbart om  $f_i$  kan särskiljas från  $x$ , dvs.

### *Teorem*

*Mod  $b_i$  är detekterbar om*

$$\text{Im } F_i(s) \not\subseteq \text{Im } H(s)$$

eller ekvivalenta uttryck som är mer lämpliga att använda som test i Matlab

$$\text{Rank } [H(s) \ F_i(s)] > \text{Rank } H(s) \Leftrightarrow N_H(s)F_i(s) \neq 0$$

## *Vad betyder detekterbarhetsvillkoret*

---

Antag ett icke detekterbart fel, dvs.  $\mathcal{O}(b_i) \subseteq \mathcal{O}(NF)$ , dvs. det gäller att

$$\text{Im } F_i(s) \subseteq \text{Im } H(s)$$

Detta betyder att det existerar en matris  $\xi(s)$  så att

$$F_i(s) = H(s)\xi(s)$$

Det betyder att modellen, under  $b_i$ , kan skrivas enligt

$$\begin{aligned} 0 &= H(p)x(t) + L(p)z(t) + F_i(p)f_i(t) = \\ &= H(p)x(t) + L(p)z(t) + H(p)\xi(p)f_i(t) \end{aligned}$$

Vid elimination av  $x$ , genom multiplikation från vänster med  $N_H(p)$  elimineras även  $f_i$ :

$$0 = \underbrace{N_H(p)H(p)}_{=0} x(t) + N_H(p)L(p)z(t) + \underbrace{N_H(p)H(p)\xi(p)}_{=0} f_i(t)$$

- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

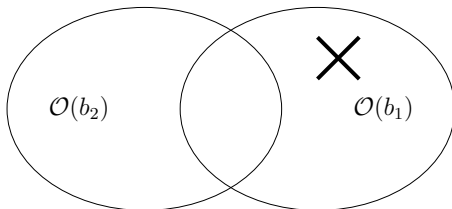


## Formell definition av isolerbarhet

### Isolerbarhet

Mod  $b_i$  är isolerbar från mod  $b_j$  i en modell om

$$\mathcal{O}(b_i) \not\subseteq \mathcal{O}(b_j)$$



Här är mod  $b_1$  isolerbar från mod  $b_2$ .

- Samma typ av villkor som detekterbarhet
- Går att skriva om isolerbarhetskravet som ett detekterbarhetskrav och använda samma villkor som för detekterbarhet

## Isolerbarhet som ett detekterbarhetsproblem

Från föreläsning 2 vet vi att

$$\mathcal{O}(b_1) \not\subseteq \mathcal{O}(b_2) \Leftrightarrow \text{detektera } f_1 \text{ oavsett värdet på } f_2$$

Skriv om modellen (med  $f_1$  och  $f_2$ )

$$0 = H(p)x + L(p)z + F_1(p)f_1 + F_2(p)f_2 = [H(p) \ F_2(p)] \begin{pmatrix} x \\ f_2 \end{pmatrix} + L(p)z + F_1(p)f_1$$

Nu kan vi använda detekterbarhetskriteriet för en ny modell med ny  $H$ -matris

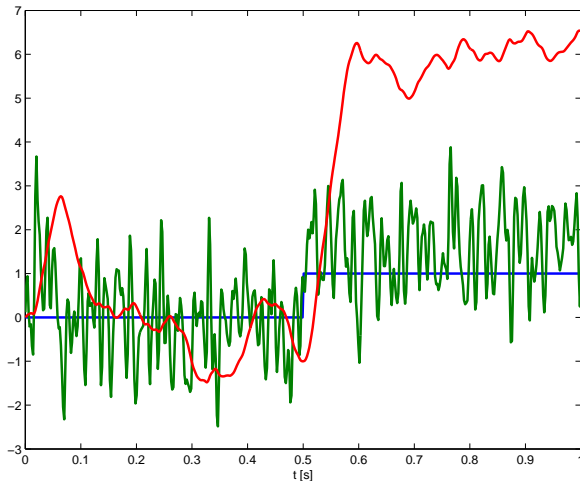
$$(H(p) \ F_2(p))$$

Mod  $b_1$  isolerbar från mod  $b_2$  om

$$\begin{aligned} \text{Im } F_1(s) &\not\subseteq \text{Im } [H(s) \ F_2(s)] \Leftrightarrow \\ \text{Rank } [H(s) \ F_1(s) \ F_2(s)] &> \text{Rank } [H(s) \ F_2(s)] \end{aligned}$$

- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

## Lågpasverkan i residualen



Är fel/brus-förhållandet för dåligt i en residual? Lågpasfiltrera hårdare.  
Säkrare detektion till priset av längre detektionstid!

$$R(s) = d^{-1}(s)\gamma(s)N_H(s)L(s)$$

Det skalära polynomet  $d(p)$  ger lämplig, tex. låg-pass, karakteristik hos residualgeneratoren

Antag mätbrus, dvs. mätsignalen och residualgenerator ges av

$$r = R(p)z = \frac{a(p)y + b(p)u}{d(p)}, \quad y = y_0 + \epsilon$$

då blir residualen i felfritt fall

$$r = \frac{a(p)}{d(p)}\epsilon$$

Känslighetsresultatet säger att om alla felen är detekterbara så existerar ett  $\gamma(s)$  så att

$$G_{rf_i}(s) = d^{-1}(s)\gamma(s)N_H(s)F_i(s) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n_f$$

dvs.  $\gamma$  kan väljas genom att bilda  $N_H(s)F(s)$  och se till att  $\gamma$  väljs så att alla element i  $\gamma N_H(s)F(s)$  är skilda ifrån 0.

- $\gamma(s)$  kan alltid väljas konstant (och det finns i regel ingen anledning att göra något annat).
- Det hela handlar om att forma överföringsfunktionerna från fel, brus, modellfel etc. till residual.

För flygmodellen från förra föreläsningen avkopplade vi fel  $f_6$  och fick följande felkänslighet:

$$N_H(s)F(s) = \begin{bmatrix} 0.0705s & s + 0.0538 & 0.091394 & 0.12 & -1 & 0 \\ 22.7459s^2 + 14.5884s & -6.6653 & s^2 - 0.93678s - 16.5141 & 31.4058 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionen är 2 och det finns exakt två linjärt oberoende residualgeneratorer.

Välj  $\gamma$  i  $\gamma N_H(s)F(s)$  så att residualen blir känslig för de ej avkopplade felen, dvs för  $f_1, \dots, f_5$ . För att göra residualen känslig för fel  $f_5$  måste rad 1 användas, dvs om  $\gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2]$  så måste  $\gamma_1 \neq 0$ .

För att välja till exempel första raden i basen, välj  $\gamma = [1 \ 0]$ :

$$\gamma(p)N_H(p)L(p) = [0.0705p \quad p + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

Följande räkningar illustrerades redan förra föreläsningen. En realiserbar residualgenerator är då till exempel:

$$R(s) = \frac{1}{1+s} [0.0705s \quad s + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

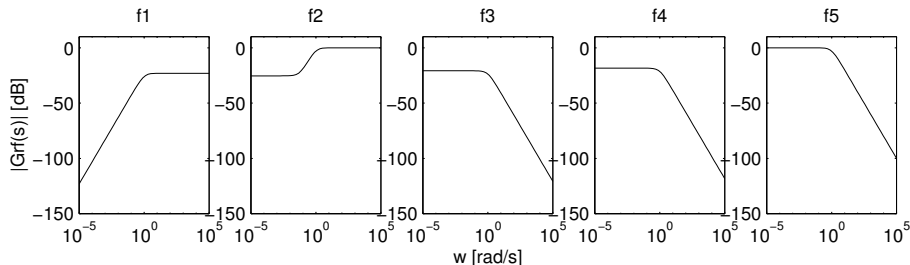
En tillståndsbeskrivning av residualgeneratorn kan visas vara

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -w + [-0.0705 \quad -0.9462 \quad 0.0914 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0] z \\ r &= w + [0.0705 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] z\end{aligned}$$

vilket är enkelt att implementera i en dator.



## Detekterbarhetsutvärdering i en bode-plot



Flera fel  $\Rightarrow$  avvägning i varje residual vilken/vilka man ska prioritera.  
Optimering.

- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

## Detekterbarhetsexempel

---

Antag ett roterande system som beskrivs av ekvationerna nedan och man mäter vinkeln  $\varphi$  med ett additivt sensorfel  $f$ .

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\mu\omega + u$$

$$y = \varphi + f$$

eller ekvivalent

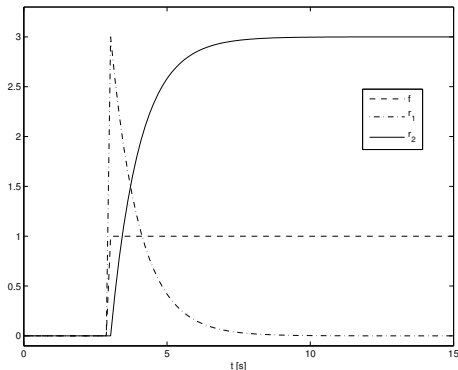
$$y = \frac{1}{p(p + \mu)} u + f$$

Enkla räkningar ger att alla residualer bygger på sambandet

$$p(p + \mu)y - u = p(p + \mu)f \Leftrightarrow \ddot{y} + \mu\dot{y} - u = \ddot{f} + \mu\dot{f}$$

Illustrerar ett enkelt fall då  $f$  är detekterbart men endast reagerar på **derivatan** av felet.

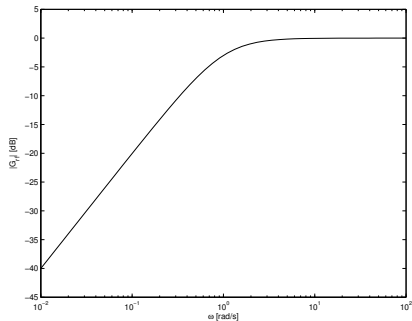
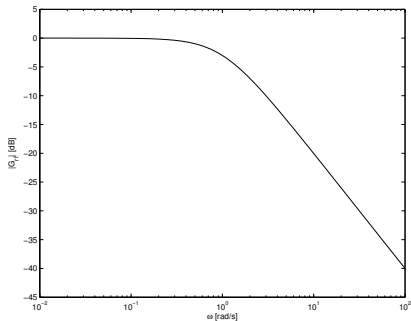
Stark detekterbarhet = hur bra kan vi detektera **konstanta** fel.



Båda residualerna är känsliga för felet, men den ena är uppenbart bättre.

# Överföringsfunktioner från fel till residual

---



## *Stark detekterbarhet, forts.*

---

$$G_{rf_i}(s) = d^{-1}(s)\gamma(s)N_H(s)F_i(s)$$

### *Definition (Starkt/svagt detekterbart fel)*

Mod  $b_i$  är starkt detekterbart om för ett konstant  $f_i \neq 0$ .

Ett detekterbart fel som inte är starkt detekterbart är svagt detekterbart.

### *Definition*

Ett fel  $f_i$  är starkt detekterbart i en residual  $r$  om  $G_{rf_i}(s)|_{s=0} \neq 0$ .

### *Teorem*

Ett fel  $f_i$  är starkt detekterbart om och endast om  $N_H(0)F_i(0) \neq 0$ .

### *Teorem*

Ett fel är starkt detekterbart om och endast om felet är starkt detekterbart med en residual.

Åter flygmodellen: avkopplade av fel  $f_6$  gav följande felkänslighet:

$$N_H(s)F(s) = \begin{bmatrix} 0.0705s & s + 0.0538 & 0.091394 & -0.12 & 1 & 0 \\ 22.7459s^2 + 14.5884s & -6.6653 & s^2 - 0.93678s - 16.5141 & -31.4058 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ett fel  $f_i$  är starkt detekterbart om och endast om  $N_H(0)F_i(0) \neq 0$ .

Eftersom  $N_H(0)F_1(0) = 0$  så finns går det inte att isolera ett konstant fel  $f_1$  ifrån  $f_6$ . (Generalisering av stark detekterbarhet till isolerbarhetsfallet)

Det finns ingen residual, dvs inget val av  $\gamma$ , så att  $f_6$  avkopplas och  $f_1$  är starkt detekterbar med residualen.

Antag att  $f_4$  har avkopplas och följande felkänslighet har beräknats

$$N_H(s)F(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & s & 0 \\ 1 & s & s & 0 \end{bmatrix}$$

Hur ska  $\gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2]$  väljas?

- Känslig för  $f_1 \Rightarrow \gamma_2 \neq 0$ .
- Starkt detekterbarhet för  $f_2 \Rightarrow \gamma_1 \neq 0$ .
- $f_3$  är svagt detekterbar för alla val av  $\gamma$ .

Exempel på lösning:  $\gamma = [1 \quad 1]$ .



- *Linjär residualgenerering*
- *Introducerande exempel*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Avgöra detekterbarhet*
- *Isolerbarhet*
  - *Formell definition*
  - *Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem*
- *Designparametrar  $d(s)$  och  $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

$$\begin{array}{c|ccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline r_1 & X & 0 & X \end{array} \quad \Rightarrow \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad d = f_2$$

- För att kunna isolera fel från varandra så vill man avkoppla fel i residualen
- Avkoppling påverkar möjligheten att detektera andra fel.
- Ett detekterbart fel kan därmed vara ej detekterbart i en viss given residualstruktur.
- Detta relaterar direkt till modellens isolerbarhetsegenskaper.
- Om  $b_i$  ej är isolerbar från  $b_j$  så kommer avkoppling av  $f_j$  automatiskt avkoppla även fel  $f_i$ .
- Isolerbarhetsvillkoren ger direkt villkor på möjliga beslutsstrukturer.

## Avkoppling påverkar möjligheten att detektera andra fel

Anta ett andra ordningens system med två insignaler och två utsignaler samt modellerade fel på in/ut-signaler.

$$e_1 : \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + f_{u_1}$$

$$e_2 : \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_2 + f_{u_2}$$

$$e_3 : y_1 = x_1 + f_{y_1}$$

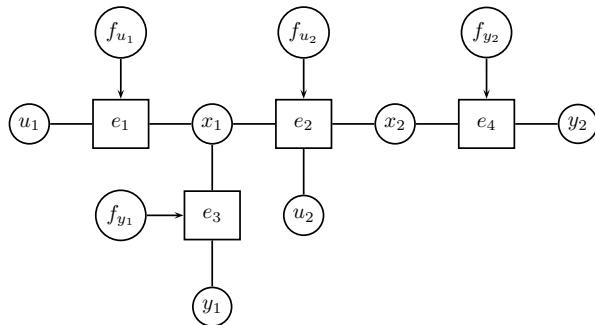
$$e_4 : y_2 = x_2 + f_{y_2}$$

Vilka av nedanstående residualer är möjliga och vilka är det inte?

	$f_{u_1}$	$f_{u_2}$	$f_{y_1}$	$f_{y_2}$
$r_1$	0	X	X	X
$r_2$	X	0	X	X
$r_3$	X	X	0	X
$r_4$	X	X	X	0
$r_5$	0	0	X	X

Går att räkna på men vill man förstå är det nyttigt att rita en figur.

## *Rita en figur eller analysera strukturen så ser man*



	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	
e <sub>1</sub>	X		← f <sub>u<sub>1</sub></sub>
e <sub>2</sub>	X	X	← f <sub>u<sub>2</sub></sub>
e <sub>3</sub>	X		← f <sub>y<sub>1</sub></sub>
e <sub>4</sub>		X	← f <sub>y<sub>2</sub></sub>

$$\begin{array}{c|cccc} & f_{u_1} & f_{u_2} & f_{y_1} & f_{y_2} \\ \hline r_1 & X & X & X & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & f_{u_1} & f_{u_2} & f_{y_1} & f_{y_2} \\ \hline r_1 & X & 0 & X & 0 \end{array}$$

Redundans två  $\Rightarrow$  kan inte skapa  $r_5$  ( $N_H = 0$ ).

## Koppling isolerbarhet och känslighet

---

Sammanfattningsvis finns följande väntade resultat som kopplar ihop känslighet med detekterbarhet/isolerbarhet:

### *Teorem (Detekterbarhet och känslighet)*

*Fel  $f_i$  är detekterbart om och endast om det existerar en residualgenerator som är känslig för fel  $f_i$ .*

### *Teorem (isolerbarhet och känslighet)*

*Fel  $f_i$  är isolerbar från  $f_j$  om och endast om det existerar en residualgenerator som avkopplar  $f_j$  och som är känslig för  $f_i$ .*

1. Beräkna detekterbarheten och isolerbarheten, som är lika med den maximala detekter- och isolerbarhetsprestandan för ett diagnossystem.
2. Ansätt en beslutsstruktur så att:
  - a) varje rad i beslutsstrukturen kan realiseras enligt detekter- och isolerbarheten.
  - b) diagnossystemets totala detekter- och isolerbarhetsprestanda blir den önskade.
3. Konstruera residualer genom att avkoppla fel enligt raderna på beslutsstrukturen.
4. Använd designfrihet i residualgeneratorerna för att få känslighet för alla fel som inte ska avkopplas enligt beslutsstrukturen. Vi ska studera detta steg härnäst.

I det olinjära fallet blir det ännu viktigare att kunna ansätta en bra beslutsstruktur, eftersom det kan krävas stora insatser att designa en residual. Analytiska metoder är begränsade i olinjära fall och strukturella analyser kan då användas för att analysera modellens detekter- och isolerbarhetsegenskaper.

- Detekterbarhet är en modellegenskap som inte nödvändigtvis är samma som felkänsligheten i konstruerade residualer.
- Enkla detekterbarhets/isolerbarhets-test via matrisvillkor.
- Om de två designvariablerna kan grovt sägas:
  - $\gamma(s)$  Åstadkomma känslighet för önskade fel och forma överföringsfunktionen.
  - $d(s)$  Införa, till exempel, lågpass-verkan för att filtrera bort brus och förstärka fel/brus-förhållandet.
- Stark detekterbarhet = kan konstanta fel detekteras?

*TSFS06 Diagnos och övervakning*  
*Föreläsning 4 - Linjär residualgenerering och*  
*detekterbarhet*

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik  
Linköpings universitet  
`erik.frisk@liu.se`

2024-04-05