

TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 3 - Linjär residualgenerering

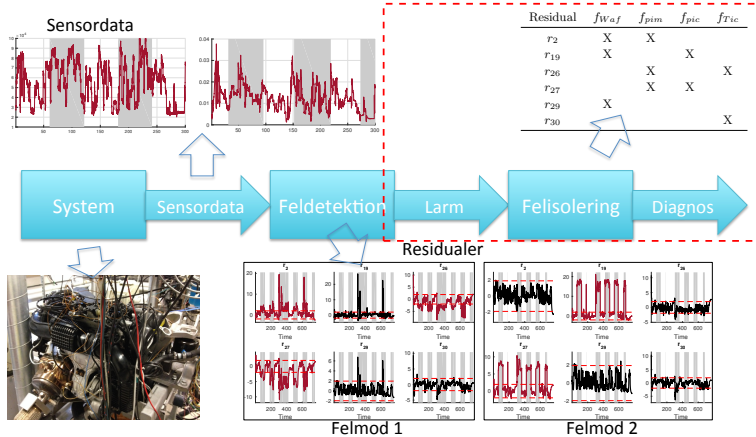
Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
`erik.frisk@liu.se`

2024-04-02

- *Bakgrund och grundläggande principer för residualgenerering*
- *Linjära differential-algebraiska modeller*
- *Formell definition av residualgenerator*
- *Designmetodik*
 - *Statiska modeller*
 - *Dynamiska modeller*
- *Avslutande exempel*
- *Kort demonstration i Matlab*

Arkitektur för diagnossystem



Idag fokus på hur en residual kan designas givet en linjär modell.

Varför intresse för linjära system?

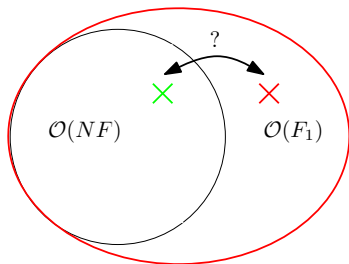
Feldetektion och observationsmängder

$\mathcal{O}(\text{mod})$ är mängden av alla observationer som är konsistenta med *mod*.

Det vore bra om vi kunde räkna direkt med dessa observationsmängder, exempelvis vill man skapa en residual r så att

$$\text{observation} \in \mathcal{O}(NF) \Rightarrow r = 0$$

$$\text{observation} \notin \mathcal{O}(NF) \Rightarrow r \neq 0$$



Svårt i generella fall, men för linjära modeller går det bra och är ämnet för denna föreläsning.

Huvudfråga för detektion: $\text{observation} \in \mathcal{O}(NF)$ eller inte.

Isolering och observationsmängder

Antag att vi har moderna NF, F_1, \dots, F_n . Om vi kan testa

$$\text{observation} \in \mathcal{O}(NF), \quad \text{observation} \in \mathcal{O}(F_i), \quad i = 1, \dots, n$$

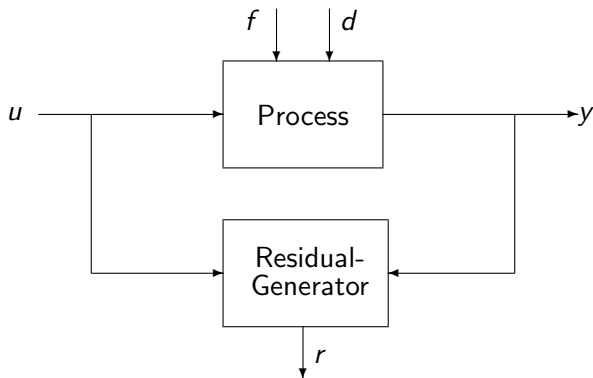
så kan vi direkt avgöra för varje mod om den är en diagnos eller inte.

Direkt motsvarighet till beslutsstrukturen:

	F_1	F_2	F_3	F_4
r_1	0	X	X	X
r_2	X	0	X	X
r_3	X	X	0	X
r_4	X	X	X	0

Huvudfråga för felisolering: $\text{observation} \in \mathcal{O}(F_i) \Leftrightarrow F_i$ diagnos

När vi kan räkna som vi vill med observationsmängder, så kan vi enkelt avgöra diagnoserna.



- Linjära system
- Alla fel och störningar modelleras som signaler
- "enkelt", dvs. kompletta lösningar kan förväntas

$$r = R(p) \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

Operatören p och den komplexa variabeln s

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2) y(t) = a(p) y(t)$$

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)} u(t) \Leftrightarrow a(p) y(t) = b(p) u(t)$$

- $\frac{p}{p} \neq 1$ men $\frac{s}{s} = 1$
- Man kan inte prata om nollställena till operatören $a(p)$ men väl till det komplexa polynomet $a(s)$.
- Det mesta av teorin i kompendiet presenteras i tidsplanet, dvs. det finns inget behov av att Laplace-transformera.

Grundläggande princip

Antag en enkel linjär statisk modell

$$x_1 = -3u$$

$$x_2 = x_1 + 2u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

där som vanligt $z = (y, u)$ är kända signaler.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(NF) &= \{z : \exists x_1, x_2. x_1 = -3u, x_2 = x_1 + 2u, y = x_1 + 2x_2\} \\ &= \{z : y = -3u - 2u\} = \{z : y = -5u\}\end{aligned}$$

Residualgenerator

Genom att **eliminera** okända signaler x får man $y = -5u$ om modellen är korrekt, och alltså kan en residual beräknas enligt

$$r = y + 5u, \quad z \in \mathcal{O}(NF) \Leftrightarrow r = 0$$

- Residualen skapas genom att ta $y - \hat{y}$ och eliminera störningarna genom kluriga linjärkombinationer.
- Möjligheterna är rätt begränsade, oftast handlar det om att inte använda den sensor/aktuator vars fel ska avkopplas.
- Ovan är ingen vidare metodbeskrivning, därför följer nu en formell beskrivning av linjära modeller, residualgeneratorer och designprocedurer.
- Störningar och brus, isolerbarhet.

- *Bakgrund och grundläggande principer för residualgenerering*
- *Linjära differential-algebraiska modeller*
- *Formell definition av residualgenerator*
- *Designmetodik*
 - *Statiska modeller*
 - *Dynamiska modeller*
- *Avslutande exempel*
- *Kort demonstration i Matlab*

En lite ovanlig modellformulering, vanligt i grundläggande reglerkurser är tillståndsformen.

En tillståndsform med tillstånd w , insignaler u , f , d , och mätsignal y :

$$\dot{w} = Aw + B_u u + B_d d + B_f f$$

$$y = Cw + D_u u + D_d d + D_f f$$

med $x = (w, d)$ och $z = (y, u)$ så fås

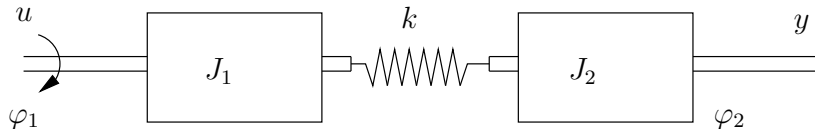
$$\underbrace{\begin{bmatrix} -(pI - A) & B_d \\ C & D_d \end{bmatrix}}_{H(p)} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & B_u \\ -I & D_u \end{bmatrix}}_{L(p)} z + \underbrace{\begin{bmatrix} B_f \\ D_f \end{bmatrix}}_{F(p)} f = 0$$

En generell linjär modell kan skrivas

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

där x är okända variabler, z kända variabler och f fel vi vill detektera. Fel vi vill avkoppla är "inbakade" i x .

- Ingen fixerad kausalitet, dvs. observationerna inte indelade i in- respektive utsignaler
- Icke-kausalitet och diagnos
- DAE:er och objektorienterad modellering



$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = u - \tau_1$$

$$\tau_1 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_1$$

$$y = \dot{\varphi}_2 + f$$

Uppgift: Skriv modellen på den generella matrisformen

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

Vad är vektorerna x , z och f i detta exempel?

Modellerings exempel - Hur hanteras dynamik?

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = u - \tau_1$$

$$y = \dot{\varphi}_2 + f$$

$$\tau_1 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_1$$

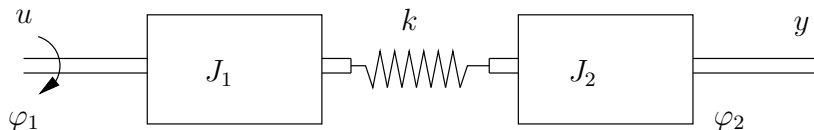
Om vi skulle skriva modellen på tillståndsform kan bland annat följande tillstånd väljas:

$$x_1 = \varphi_1, \quad x_2 = \dot{\varphi}_1, \quad \dot{x}_1 = x_2$$

Att skriva modellen på den generella matrisformen är mycket enklare!

- φ_1 och $\dot{\varphi}_1 = p\varphi_1$ bör inte betraktas som två obekanta utan som två formler i en obekant, nämligen i φ_1 . Jmf φ_1 och $k\varphi_1$.
- Tillskillnad från när man skriver en tillståndsform så finns det ingen anledning att införa $\dot{\varphi}_1$.
- Det behövs ingen extra ekvation som beskriver att $p\varphi_1$ är derivatan av φ_1 , det är inbyggt i notationen.

Modellerings exempel - Vad är känt och okänt?



$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = u - \tau_1$$

$$\tau_1 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_1$$

$$y = \dot{\varphi}_2 + f$$

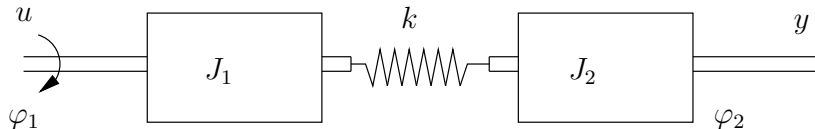
Bara det som representerar en mätsignal eller en av dator utlagd styrsignal är känd. Allt annat är okänt!

u är en känd styrsignal, y är mätsignal, dessa är alltså kända variabler.

$\dot{\varphi}_2$ betecknar en vinkelhastighet som mäts av y . Är $\dot{\varphi}_2$ känd? eller är kanske till och med φ_2 känd?

Nej! Varken φ_2 eller $\dot{\varphi}_2$ är känd men vi kan skatta $\dot{\varphi}_2$ genom att använda y och vetskapen om att dessa signaler (åtminstone i felfritt fall) är ganska lika.

Modellerings exempel



$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = u - \tau_1$$

$$y = \dot{\varphi}_2 + f$$

$$\tau_1 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_1$$

Varabler: $\varphi_1, u, \tau_1, \varphi_2, y, f$

$$x = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} J_1 p^2 & 0 & 1 \\ k & -k & -1 \\ 0 & J_2 p^2 & -1 \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix}}^{H(p)=} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{L(p)=} z + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}^{F(p)=} f = 0$$

- *Bakgrund och grundläggande principer för residualgenerering*
- *Linjära differential-algebraiska modeller*
- *Formell definition av residualgenerator*
- *Designmetodik*
 - *Statiska modeller*
 - *Dynamiska modeller*
- *Avslutande exempel*
- *Kort demonstration i Matlab*

Residualer

Lite löst, en residual är en **signal** r som är 0 när övervakade fel $f(t)$ är 0 (och gärna skild från 0 vid ett övervakat fel).

- **Övervakade fel (monitored faults)**

Fel man vill ska påverka residualen; vara detekterbara i residualen

- **Icke övervakade fel (non-monitored faults)**

Fel man inte vill ska påverka residualen, detta på grund av isolationsskäl.

$$\begin{array}{c|ccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline r_1 & X & 0 & X \end{array} \Rightarrow f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad d = f_2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline r_2 & 0 & X & X \end{array} \Rightarrow f = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad d = f_1$$

Se till att detta är klart, brukar kunna välla problem annars

Formell definition av residualgenerator

- Observationsmängden \mathcal{O} beskriver alla observationer som är konsistenta med felfritt beteende (eller den moden vi vill testa)

$$\mathcal{O} = \{z | \exists x; H(p)x + L(p)z = 0\}$$

- Feldetektering blir då att avgöra om $z \in \mathcal{O}$ eller inte.

Definition

Ett propert linjärt filter $R(p)$ är en residualgenerator för observationsmängden \mathcal{O} och $r = R(p)z$ en residual om

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$$

- Varför proper?
- Limes och dynamiska/statiska modeller.
- Detekterbarhet då?
- Tidsdiskreta system

$$\mathcal{O}(NF) = \{z | \exists x; H(p)x + L(p)z = 0\}$$

$$\mathcal{O}(F_i) = \{z | \exists x, f_i; H(p)x + L(p)z + F_i(p)f_i = 0\}$$

En residual detekterar $z \notin \mathcal{O}$:

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$$

Isolera en mod

Därför, med $\mathcal{O} = \mathcal{O}(F_1)$ så kommer motsvarande residual att kunna användas för att isolera fel *från* mod F_1 .

	NF	F_1	F_2	F_3
	0	0	X	X

Gå tillbaka till förra föreläsningen om isolerbarhetsegenskaper för ett diagnossystem och relatera!

- *Bakgrund och grundläggande principer för residualgenerering*
- *Linjära differential-algebraiska modeller*
- *Formell definition av residualgenerator*
- *Designmetodik*
 - *Statiska modeller*
 - *Dynamiska modeller*
- *Avslutande exempel*
- *Kort demonstration i Matlab*

Teori för att systematiskt ta fram alla residualer. Det kommer finnas funktioner i Matlab som stöder hela designproceduren.

- 1 Metod för **statiska** linjära modeller
- 2 Metod för **dynamiska** linjära modeller

Design för ett enkelt statistiskt system

Antag en enkel linjär statistisk modell

$$x_1 = -3u$$

$$x_2 = x_1 + 2u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

där som vanligt u och y är kända signaler.

- En residualgenerator beräknar en residual utgående från kända signaler $z = (y, u)$.
- Variablerna x_i är okända \Rightarrow eliminera dessa

$$y = x_1 + 2x_2 = x_1 + 2x_1 + 4u = 3x_1 + 4u = -9u + 4u = -5u$$

Alltså kan en residual beräknas enligt

$$r = y + 5u$$

Om modellen gäller så är $r = 0$. Härleddes genom eliminering av de okända variablerna x .

Låt $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vara en matris med rang r . Vänster nollrum till A definieras då som

$$\mathcal{N}_L = \{v : vA = 0\}$$

Detta betyder att $v \cdot a_i = 0$ dvs v är ortogonal med alla kolonnvektorer i A .

Dimensionen på \mathcal{N}_L är lika med antalet rader i A minus dimensionen på det rum som spänns upp av kolonnvektorerna i A , dvs $n - r$.

Låt raderna i en matris N_A vara en bas för \mathcal{N}_L , då kommer N_A att ha $n - r$ rader.

Viktiga begrepp - Se till att förstå dessa

- linjära rum
- rang
- dimension
- nollrum

Designprocedur för statistiska modeller

En statistisk modell och residualgenerator (inga p /derivator)

$$Hx + Lz + Ff = 0, \quad r = Rz$$

Betrakta felfria fallet ($f = 0$) och multiplicera modellen från vänster med N_H

$$0 = N_H(Hx + Lz) = N_H Lz, \quad \xRightarrow{\text{Lemma 6.7}} \mathcal{O} = \{z | N_H Lz = 0\}$$

En residualgenerator ges då till exempel av

$$r = \gamma N_H Lz = Rz$$

för godtycklig radvektor γ (hur man väljer γ kommer senare).

Teorem

Den konstanta matrisen R är en residualgenerator för en statistisk modell om och endast om R kan skrivas

$$R = \gamma N_H L$$

Modellen blir på matrisform

$$Hx + Lz = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = 0$$

En bas för vänster nollrum (dimension = $3 - \text{rang } H = 3 - 2 = 1$) är

$$N_H = (3 \quad 2 \quad -1)$$

$$\mathcal{O} = \{z | N_H Lz = 0\} = \{z | y + 5u = 0\}$$

vilket är samma uttryck som vi härledde för hand och man kan tänka sig en residual

$$r = y + 5u$$

Designproceduren kan alltså sammanfattas med följande steg

- 1 Skapa modellmatriserna H , L , and F .
- 2 Beräkna en bas N_H för vänster nollrum till matrisen H .
- 3 En residualgenerator $r = Rz$ för modellen ges då av $R = \gamma N_H L$ där γ är en fri designparameter.

- Designproceduren närmast identisk för dynamiska modeller, vi behöver "bara" räkna med polynommatriser istället för konstanta matriser.
- Kommer att krävas ett extra steg, men vi börjar som i det statiska fallet.

Påminner om definition av residualgenerator

- Observationsmängden \mathcal{O} beskriver alla observationer som är konsistenta med felfritt beteende (eller den moden vi vill testa)

$$\mathcal{O} = \{z | \exists x; H(p)x + L(p)z = 0\}$$

- Feldetektering blir då att avgöra om $z \in \mathcal{O}$ eller inte.

Definition

Ett propert linjärt filter $R(p)$ är en residualgenerator och $r = R(p)z$ en residual om

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$$

- Varför proper?
- Limes och dynamiska/statiska modeller.

Litet introducerande exempel

Med ett litet system

$$\dot{x} = -x + u$$

$$y = x$$

Elimination av den obekanta variabeln x är här trivialt och vi får

$$\dot{y} + y - u = 0$$

Tänkbart med en residual enligt

$$r = \dot{y} + y - u$$

Vad gör vi åt derivatan \dot{y} ?
Numerisk derivering känns inte helt attraktivt.

Litet introducerande exempel, forts.

Istället för att beräkna residualen enligt

$$r = \dot{y} + y - u$$

så kan man tänka sig en låg-pass filtrerad version

$$\tilde{r} = \frac{1}{p + \beta}(\dot{y} + y - u) = \frac{p + 1}{p + \beta}y - \frac{1}{p + \beta}u$$

som kan visas skrivas på tillståndsformen

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\beta w + (1 - \beta)y - u \\ \tilde{r} &= w + y\end{aligned}$$

Poäng

Via introduktion av efterfiltrering, samt en enklare omskrivning har vi en residualgenerator

Egenskaper hos propria system

En proper överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad \deg a(s) \geq \deg b(s)$$

kan enkelt skrivas på **explicit tillståndsform**, dvs. det finns matriser A , B , C , och D så att differentialekvationen

$$a(p)r = b(p)z$$

beskrivs av tillståndsformen

$$\dot{w} = Aw + Bz$$

$$r = Cw + Dz$$

- Inga derivator av insignalen
- Exempelvis observerbar kanonisk form
- Residualen på förra bilden hade enbart en täljare, ingen nämnare.
- Filtrera den tänkta residualen, "Lägg till en nämnare"

Observerbar kanonisk form

$$G(p) = \frac{1}{a(p)} [b_1(p) \quad \dots \quad b_m(p)]$$

$$a(p)r(t) = b_1(p)z_1(t) + \dots + b_m(p)z_m(t)$$

$$a(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n, \quad b_i(p) = b_{i,1}p^{n-1} + \dots + b_{i,n}$$

så är ett exempel på en tillståndsrealisering

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{m,1} \\ b_{1,2} & \dots & b_{m,2} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1,n-1} & \dots & b_{m,n-1} \\ b_{1,n} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} z$$
$$r = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0) w$$

(strikt) proper överföringsfunktion

Gradtalet i nämnarna (strikt) större än täljarna

Låt $A(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vara en polynommatris med rang r . Vänster nollrum till $A(s)$ definieras då som

$$\mathcal{N}_L = \{v(s) : v(s)A(s) = 0\}$$

Dimensionen, dvs antalet rader i en bas $N_A(s)$, ges av antalet rader minus rangen, dvs. $n - r$.

Definition (Normalrang)

Låt $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ vara en polynommatris, då är normalrang för $A(s)$

$$\max_{s \in \mathbb{C}} \text{rank } A(s)$$

Ordet **normal** utelämnas ofta och man säger enbart rang av en polynommatris när man egentligen menar normalrang.

Matrisen

$$A(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

Har full (normal-)rang eftersom

$$\det A(s) = s^2 + 4s + 5 \neq 0$$

Nollställena till $A(s)$ är precis de $s \in \mathbb{C}$ där matrisen tappat rang, dvs. i $s = -2 \pm i$

$$s^2 + 4s + 5 = (s + 2 + i)(s + 2 - i)$$

$$A(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & a s^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A(s) = 2$$

Dimensionen på vänster nollrum är då $3 - 2 = 1$ och en bas ges av raderna i tex.

$$N_A(s) = [a s^2 \quad -2 \quad -a s^2(s+1)]$$

Lite mer information finns i ett appendix i kompendiet.

Residualgenerering för dynamiska modeller

Modellen är nu igen

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

Som i det statiska fallet, betrakta det felfria systemet och multiplicera från vänster med **operatorn** $N_H(p)$

$$0 = N_H(p)(H(p)x + L(p)z) = N_H(p)L(p)z$$

På samma sätt som tidigare gäller

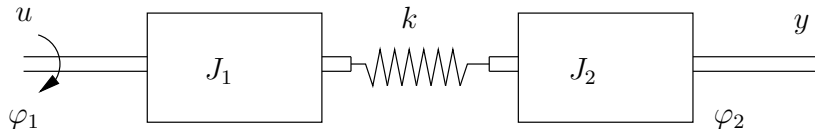
$$\mathcal{O} = \{z | N_H(p)L(p)z = 0\}$$

och man skulle kunna tänka sig

$$r = \gamma(p)N_H(p)L(p)z, \quad z \in \mathcal{O} \Leftrightarrow r = 0$$

som residualgenerator. Ett problem dyker dock upp pga dynamiken!

Modelleringsexemplet igen



$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = u - \tau_1$$

$$y = \dot{\varphi}_2 + f$$

$$\tau_1 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_1$$

Varabler: $\varphi_1, u, \tau_1, \varphi_2, y, f$

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix} \\ z &= \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} J_1 p^2 & 0 & 1 \\ k & -k & -1 \\ 0 & J_2 p^2 & -1 \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix}}^{H(p)=} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{L(p)=} z + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}^{F(p)=} f = 0$$

Modellerings exempel, forts.

Matriserna $H(p)$ och $L(p)$ var där

$$H(p) = \begin{bmatrix} J_1 p^2 & 0 & 1 \\ k & -k & -1 \\ 0 & J_2 p^2 & -1 \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix}, \quad L(p) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nollrummet har då dimension $4 - 3 = 1$ och en bas för vänster nollrum till $H(s)$ kan beräknas till

$$N_H(s) = \begin{bmatrix} k & -J_1 s^2 & k + J_1 s^2 & k(J_1 + J_2)s + J_1 J_2 s^3 \end{bmatrix}$$

dvs.

$$\mathcal{O} = \{z | N_H(p)L(p)z = 0\} = \{z | J_1 J_2 y^{(3)} + k(J_1 + J_2)\dot{y} - ku = 0\}$$

med en tänkt residual

$$r = N_H(p)L(p)z = J_1 J_2 y^{(3)} + k(J_1 + J_2)\dot{y} - ku$$

Problem! Derivator av insignaler i uttrycket.

Propra överföringsfunktioner och derivator i beräkning

Litet exempel:

$$r_1 = \dot{y} + y - y$$

Lägg till ett post-filter ($\alpha > 0$ för stabilitet)

$$r_2 = \frac{1}{p + \alpha} r_1 = \frac{1}{p + \alpha} (\dot{y} + y - u)$$

Detta r_2 kan skrivas på tillståndsform och beräknas utan att känna till/approximera derivator. Sätt tillståndet till $w = r_2 - y$, då

$$\dot{w} = -\alpha w + (1 - \alpha)y - u$$

$$r_2 = w + y$$

Slutsats: Genom att införa efterfiltrering (som vi sannolikt vill ha hursom) så kunde vi beräkna residual utan att känna derivator.

Då \dot{z} , \ddot{z} , ... ej är kända måste vi beräkna residualen på annat sätt. Istället för

$$r = \gamma(p)N_H(p)L(p)z$$

beräkna residualen enligt

$$r = \frac{1}{d(p)}\gamma(p)N_H(p)L(p)z \Leftrightarrow d(p)r = \gamma(p)N_H(p)L(p)z$$

Bara $d(p)$ har gradtal minst lika stort som $\gamma(p)N_H(p)L(p)$ så kan

$$R(p) = d^{-1}(p)\gamma(p)N_H(p)L(p)$$

skrivas på tillståndsform och r kan beräknas utan att vi behöver derivator av z .

För att uppfylla definitionen så måste residualgeneratorn vara stabil.

$$\mathcal{O} = \{z | \exists x; H(p)x + L(p)z = 0\} = \{z | N_H(p)L(p)z = 0\}$$

Stabiliteten avgörs av $d(p)$ i

$$d(p)r = \gamma(p)N_H(p)L(p)z$$

Om $d(s)$ har enbart stabila nollställen och $z \in \mathcal{O}$ så kommer r beskrivas av differentialekvationen

$$d(p)r = 0$$

och gå mot 0, dvs.

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$$

vilket var det vi ville.

Vi vill beräkna r enligt

$$d(p)r = N_H(p)L(p)z = [k(J_1 + J_2)p + J_1 J_2 p^3 \quad -k]$$

Eftersom $N_H(s)L(s)$ har gradtal 3 så måste $d(s)$ minst ha gradtal 3. Välj här exempelvis $d(s) = (s + \alpha)^4$ vilket ger en överföringsfunktion

$$R(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^4} [J_1 J_2 p^3 + k(J_1 + J_2)p \quad -k]$$

som kan skrivas på tillståndsform.

- $d(s)$ måste vara stabil och tillräckligt högt gradtal, i övrigt fri att välja.

Exempel, avslutning

Den ursprungliga residualen,

$$r = N_H(p)L(p)z = J_1 J_2 y^{(3)} + k(J_1 + J_2)\dot{y} - ku$$

beräknades istället via överföringsfunktionen

$$r(t) = \frac{1}{(p + \alpha)^4} \begin{bmatrix} J_1 J_2 p^3 + k(J_1 + J_2)p & -k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

vilket kan skrivas på tillståndsformen

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} J_1 J_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ k(J_1 + J_2) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$
$$r = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) w$$

Uppfyller $z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$, samt innehåller inga derivator.

Residualgeneratorer för dynamiska system

En tillräcklig väg för att hitta en residualgenerator har visats. Det går att visa att den vägen även är nödvändig, dvs. alla residualgeneratorer kan hittas på det sättet:

Teorem

Ett filter med överföringsoperator $R(p)$ är en residualgenerator om och endast om det existerar ett stabilt polynom $d(s)$ och en radvektor $\gamma(s)$ så att

$$R(p) = \frac{1}{d(p)} \gamma(p) N_H(p) L(p) \quad (1)$$

där $\deg d(p) \geq \deg \gamma(p) N_H(p) L(p)$.

- Vad händer med tidsdiskreta system med tanke på "problem" med derivator i kontinuerliga system?

Sammanfattning: Design av residualgeneratorer

- 1 Skapa modellmatriserna $H(p)$, $L(p)$, och $F(p)$.
- 2 Beräkna en bas $N_H(s)$ för vänster nollrum till matrisen $H(s)$.
- 3 En residualgenerator $r = R(p)z$ för modellen ges av

$$R(p) = \frac{1}{d(p)} \gamma(p) N_H(p) L(p)$$

Radvektorn $\gamma(s)$ och det skalära polynomet $d(s)$ är fria designparametrar med följande begränsningar:

- polynomet $d(s)$ måste ha alla sina nollställen i vänster halvplan.
- gradtalet hos $d(s)$ måste vara större eller lika med rad-gradtalet hos $\gamma(s)N_H(s)L(s)$ för att kunna skriva residualgeneratoren på tillståndsform.

Val av $d(s)$ och $\gamma(s)$ ej diskuterat här. Del av nästa föreläsning då detekterbarhet av fel diskuteras.

- *Bakgrund och grundläggande principer för residualgenerering*
- *Linjära differential-algebraiska modeller*
- *Formell definition av residualgenerator*
- *Designmetodik*
 - *Statiska modeller*
 - *Dynamiska modeller*
- *Avslutande exempel*
- *Kort demonstration i Matlab*

Avslutande exempel: linjär modell av flygplan

Modellen är en linjäriserad modell av ett flygplan i en arbetspunkt.
Insignaler och utsignaler:

Inputs	Outputs
u_1 : spoiler angle [tenth of a degree]	y_1 : relative altitude [m]
u_2 : forward acceleration [ms^{-2}]	y_2 : forward speed [ms^{-1}]
u_3 : elevator angle [degrees]	y_3 : Pitch angle [degrees]

Fel: tre sensorfel (f_1 , f_2 , and f_3), och tre aktuatorfel (f_4 , f_5 , and f_6).
Modellen är en tillståndsbeskrivning med 5 tillstånd. Felmodellering:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = G(p) \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Designproblem

Konstruera en residualgenerator $R(p)$ så att fel aktuator 3 ej påverkar residualen:

l	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
r	X	X	X	X	X	0

Definiera vektorerna f och d som:

$$z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} \quad d = f_6$$

$5 + 3 = 8$ ekvationer och $5 + 1 = 6$ signaler som ska avkopplas \Rightarrow dimension $8 - 6 = 2$ på rummet av residualgeneratorer.

Modellen är given på tillståndsform och beräkningar i MATLAB ger

$$N_H(s)L(s) = \begin{bmatrix} 0.0705s & s + 0.0538 & 0.091394 & 0.12 & -1 & 0 \\ 22.7459s^2 + 14.5884s & -6.6653 & s^2 - 0.93678s - 16.5141 & 31.4058 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionen 2 som väntat \Rightarrow det finns exakt två linjärt oberoende residualgeneratorer där $d = f_6$ är avkopplat.

Uttrycken $N_H(p)L(p)z = 0$ svarar alltså mot relationerna

$$0.0705\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + 0.0538y_2 + 0.091394y_3 + 0.12u_1 - u_2 = 0$$

$$22.7459\ddot{y}_1 + 14.5884\dot{y}_1 - 6.6653y_2 + \\ + \ddot{y}_3 - 0.93678\dot{y}_3 - 16.5141y_3 + 31.4058u_1 = 0$$

Men eftersom derivator av y etc. ej är kända måste vi lägga till dynamik.

Välj första raden i basen, dvs. $\gamma = [1 \ 0]$:

$$\gamma(p)N_H(p)L(p) = [0.0705p \quad p + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

En realiserbar residualgenerator är då till exempel:

$$R(s) = \frac{1}{1+s} [0.0705s \quad s + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

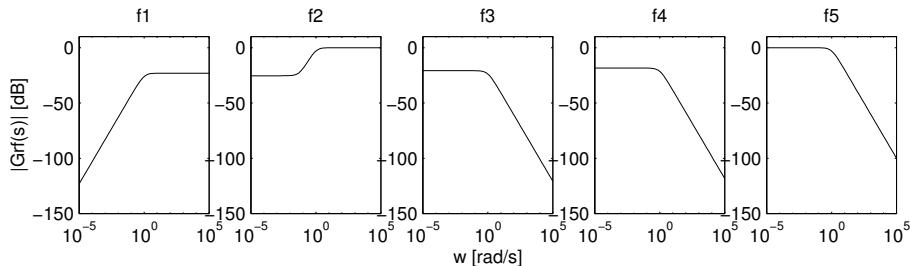
Notera 0 i förstärkning från u_3 , dvs avkoppling av f_6 .

En tillståndsbeskrivning av residualgeneratoren kan visas vara

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -w + [-0.0705 \quad -0.9462 \quad 0.0914 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0] z \\ r &= w + [0.0705 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] z\end{aligned}$$

vilken är enkel att implementera i en dator.

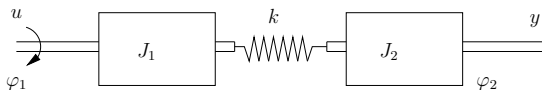
Prestanda kan utvärderas på många sätt, återkommer till det senare i kursen.



- Metodiken var “oavslutad” i och med att ingen diskussion om hur $\gamma(s)$ och $d(s)$ ska väljas.
- Ämne för nästa gång då detekterbarhet diskuteras.
- $\gamma(s)$ styr detekterbarhet och $d(s)$ ger lämplig låg-pass verkan hos residualgeneratoren.

- *Bakgrund och grundläggande principer för residualgenerering*
- *Linjära differential-algebraiska modeller*
- *Formell definition av residualgenerator*
- *Designmetodik*
 - *Statiska modeller*
 - *Dynamiska modeller*
- *Avslutande exempel*
- *Kort demonstration i Matlab*

Exempelmodell



$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix} \\ z &= \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \begin{matrix} H(p)= \\ \left[\begin{array}{ccc} J_1 p^2 & 0 & 1 \\ k & -k & -1 \\ 0 & J_2 p^2 & -1 \\ 0 & -p & 0 \end{array} \right] \end{matrix} x + \begin{matrix} L(p)= \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} z + \begin{matrix} F(p)= \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \end{matrix} f = 0$$

- Formulera modell
- Beräkna noll-rum
- Ta fram konsistensrelation
- Lägg till dynamik och ta fram tillståndsform för residualgenerator

$$r = R(p) \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

- Plotta överföringsfunktion

$$|R(j\omega)|$$

TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 3 - Linjär residualgenerering

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
erik.frisk@liu.se

2024-04-02