

# Talteori, Föreläsning 7

## Kedjebråk

Jan Snellman<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Matematiska Institutionen  
Linköpings Universitet

Föreläsningsanteckningar på kurshemsidan <http://courses.mai.liu.se/GU/TATA54/>



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## 1 Ändliga kedjebråk

Exempel, egenskaper

Existens och unikhhet

KB som rationella funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning: Linjära diofantiska

## 2 Oändliga kedjebråk

Partiella konvergener, repetition

Kedjebråksprocessen

## 3 Diofantisk approximation

## 4 Geometrisk tolkning

## 5 Tillämpningar

Känna igen ett rationellt tal

Kalender

Huygens planetarium

## 6 Periodiska kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk irrationalitet

Lagranges sats

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## 1 Ändliga kedjebråk

Exempel, egenskaper

Existens och unikhhet

KB som rationella funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning: Linjära diofantiska

## 2 Oändliga kedjebråk

Partiella konvergener, repetition

Kedjebråksprocessen

## 3 Diofantisk approximation

## 4 Geometrisk tolkning

## 5 Tillämpningar

Känna igen ett rationellt tal

Kalender

Huygens planetarium

## 6 Periodiska kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk irrationalitet

Lagranges sats

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## 1 Ändliga kedjebråk

Exempel, egenskaper

Existens och unikheter

KB som rationella funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning: Linjära diofantiska

## 2 Oändliga kedjebråk

Partiella konvergener, repetition

Kedjebråksprocessen

## 3 Diofantisk approximation

## 4 Geometrisk tolkning

## 5 Tillämpningar

Känna igen ett rationellt tal

Kalender

Huygens planetarium

## 6 Periodiska kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk irrationalitet

Lagranges sats

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## 1 Ändliga kedjebråk

Exempel, egenskaper

Existens och unikhhet

KB som rationella funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning: Linjära diofantiska

## 2 Oändliga kedjebråk

Partiella konvergener, repetition

Kedjebråksprocessen

## 3 Diofantisk approximation

## 4 Geometrisk tolkning

## 5 Tillämpningar

Känna igen ett rationellt tal

Kalender

Huygens planetarium

## 6 Periodiska kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk irrationalitet

Lagranges sats

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## 1 Ändliga kedjebråk

Exempel, egenskaper

Existens och unikheter

KB som rationella funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning: Linjära diofantiska

## 2 Oändliga kedjebråk

Partiella konvergener, repetition

Kedjebråksprocessen

## 3 Diofantisk approximation

## 4 Geometrisk tolkning

## 5 Tillämpningar

Känna igen ett rationellt tal

Kalender

Huygens planetarium

## 6 Periodiska kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk irrationalitet

Lagranges sats

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## ① Ändliga kedjebråk

Exempel, egenskaper

Existens och unikheter

KB som rationella funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning: Linjära diofantiska

## ② Oändliga kedjebråk

Partiella konvergener, repetition

Kedjebråksprocessen

## ③ Diofantisk approximation

## ④ Geometrisk tolkning

## ⑤ Tillämpningar

Känna igen ett rationellt tal

Kalender

Huygens planetarium

## ⑥ Periodiska kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk irrationalitet

Lagranges sats

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{2}{23}} = 5 + \frac{23}{71} = \frac{378}{71}$$



## Exempel

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

$$5 = 5 \approx 5.000$$

$$5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \approx 5.333$$

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{11}} = \frac{181}{34} \approx 5.323$$

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}} = \frac{378}{71} \approx 5.324$$

## Exempel

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

$$\begin{aligned}\frac{720}{164} &= 4 + \frac{64}{164} = 4 + \frac{1}{\frac{164}{64}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{36}{64}} \\ &= 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{64}{36}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{28}{36}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{36}{28}}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{8}{28}}}} \\ &= 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{28}{8}}}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{8}}}}} \\ &= 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8}}}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}}\end{aligned}$$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergenter

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel (Forsättning)

Notation:

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}} = [4, 2, 1, 1, 3, 2]$$

Konvergenter:

$$[4] = 4, \quad [4, 2] = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$[4, 2, 1] = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{13}{3}, \quad [4, 2, 1, 1] = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{22}{5}$$

$$[4, 2, 1, 1, 3] = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = \frac{79}{18}$$

$$[4, 2, 1, 1, 3, 2] = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{180}{41} = \frac{180 * 4}{41 * 4} = \frac{720}{164}$$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel (Fortsättning)

Jämför med Euklides alg:

$$720 = 4 * 164 + 64$$

$$164 = 2 * 64 + 36$$

$$64 = 1 * 36 + 28$$

$$36 = 1 * 28 + 8$$

$$28 = 3 * 8 + 4$$

$$8 = 2 * 4$$

$$\gcd(720, 164) = 4, \frac{720}{164} = \frac{180}{41} = [4, 2, 1, 1, 3, 2].$$

## Exempel

Annat exempel:

$$45 = 2 * 16 + 13$$

$$16 = 1 * 13 + 3$$

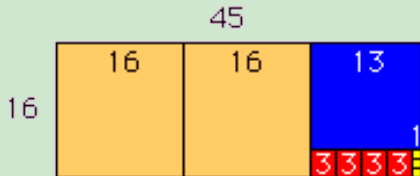
$$13 = 4 * 3 + 1$$

$$3 = 3 * 1 + 0$$

så

$$\frac{45}{16} = [2, 1, 4, 3] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}$$

Geometrisk bild:



Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

- $\frac{31}{18} = [1, 1, 2, 1, 1, 2] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$
- $\frac{18}{31} = [0; 1, 1, 2, 1, 1, 2] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}$
- $[2, 3, 4] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- Om  $c_0 > 0$  så  $1/[c_0, \dots, c_n] = [0, c_0, \dots, c_n]$ ; annars  
 $1/[0, c_1, \dots, c_n] = [c_1, \dots, c_n]$
- Om  $m > 1$  så

$$[0, m] = \frac{1}{m} = \frac{1}{m-1 + \frac{1}{1}} = [0, m-1, 1]$$

och på liknande sätt

$$[c_0, \dots, c_{n-1}, m] = [c_0, \dots, c_{n-1}, m-1, 1]$$

Första varianten föredras

- Det gäller också att  $[c_0, \dots, c_{n+1}] = [c_0, \dots, c_{n-1}, c_n + \frac{1}{c_{n+1}}]$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Teorem

Låt  $a, b$  vara positiva heltal. Då finns det ett unikt sätt att skriva  $a/b$  som ett ändligt kedjebråk, så att

$$\frac{a}{b} = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_n]$$

med  $c_i \in \mathbb{Z}$ ,  $c_0 \geq 0$ ,  $c_j \geq 1$  för  $j \geq 1$ ,  $c_n \geq 2$  om  $n > 0$

Om  $a < b$  så  $c_0 = 0$  och

$$(c_1, \dots, c_n) \mapsto [0, c_1, \dots, c_n]$$

ger en bijektion mellan ändliga följder av positiva heltal och  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .



Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergens

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Bevis.

Antag  $a > b$ .

Existens: Euklides algoritm.

Unikhet: om  $a/b = c_0 + \frac{1}{[c_1, c_2, \dots, c_n]} = d_0 + \frac{1}{[d_1, d_2, \dots, d_n]}$ , så eftersom  $\frac{1}{[c_1, c_2, \dots, c_n]} < 1$ , följer det att  $c_0 = \lfloor a/b \rfloor$ , och på samma sätt  $d_0 = \lfloor a/b \rfloor$ . Alltså  $c_0 = d_0$ .

Subtrahera, och betrakta

$$\frac{1}{[c_1, c_2, \dots, c_n]} = \frac{1}{[d_1, d_2, \dots, d_n]} \implies [c_1, c_2, \dots, c_n] = [d_1, d_2, \dots, d_n]$$

Då får vi  $c_1 = d_1$ , och så vidare.



## Exempel

Vi listar kedjebråksframställningen av  $k/13$  för  $1 \leq k \leq 12$ :

k	CF
1	[0; 13]
2	[0; 6, 2]
3	[0; 4, 3]
4	[0; 3, 4]
5	[0; 2, 1, 1, 2]
6	[0; 2, 6]
7	[0; 1, 1, 6]
8	[0; 1, 1, 1, 1, 2]
9	[0; 1, 2, 4]
10	[0; 1, 3, 3]
11	[0; 1, 5, 2]
12	[0; 1, 12]

Lägg märke till att baklängesvarianten till varje KB dyker upp i listan (ibland skrivet på ostandardform).

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel  
Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Kan förklara fenomenet mha

## Lemma

Antag att  $a_0 > 0$ ,  $[a_0, \dots, a_n] = \frac{A}{B}$ ,  $[a_0, \dots, a_{n-1}] = \frac{C}{D}$ . Då

$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0] = \frac{A}{C}$$

## Bevis.

Behöver Eulers regel.



## Exempel

$$[2, 3, 7] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}} = \frac{51}{22}$$

$$[2, 3] = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$[7, 3, 2] = \frac{51}{7}$$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- $[c_0] = c_0,$
- $[c_0, c_1] = c_0 + \frac{1}{c_1} = \frac{c_0 c_1 + 1}{c_1}$
- $[c_0, c_1, c_2] = [c_0, \frac{1}{[c_1, c_2]}] = c_0 + \frac{1}{[c_1, c_2]} = c_0 + \frac{c_2}{c_1 c_2 + 1} = \frac{c_0 c_1 c_2 + c_0 + c_2}{c_1 c_2 + 1}$
- $[c_0, c_1, c_2, c_3] = [c_0, \frac{1}{[c_1, c_2, c_3]}] = c_0 + \frac{1}{[c_1, c_2, c_3]} = c_0 + \frac{c_2 c_3 + 1}{c_1 c_2 c_3 + c_1 + c_3} = \frac{c_0 c_1 c_2 c_3 + c_0 c_1 + c_0 c_3 + c_2 c_3 + 1}{c_1 c_2 c_3 + c_1 + c_3}$
- I allmänhet,  

$$[c_0, \dots, c_{n+1}] = [c_0, \dots, c_{n-1}, c_n + \frac{1}{c_{n+1}}] = c_0 + \frac{1}{[c_1, \dots, c_{n+1}]} = [c_0, [c_1, \dots, c_{n+1}]]$$
- Så  $[c_0, \dots, c_n] = \frac{p_n(c_0, \dots, c_n)}{q_n(c_0, \dots, c_n)}$  med  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}[c_0, \dots, c_n]$

## Teorem (Eulers regel)

Låt  $\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)$  vara det polynom som är summan av

- produkten  $T_n = c_0 c_1 \cdots c_n$ ,
- alla faktorer till  $T_n$  erhållna genom att ta bort ett konsekutivt par  $c_i c_{i+1}$ ,
- alla faktorer till  $T_n$  erhållna genom att ta bort två disjunkta konsekutiva par  $c_i c_{i+1}$  och  $c_\ell c_{\ell+1}$ ,
- alla faktorer erhållna genom att ta bort tre disjunkta konsekutiva par
- och så vidare

Då

- $[c_0, \dots, c_n] = \frac{\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)}{\mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n)}$
- $\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n) = c_0 \mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n) + \mathcal{L}_{n-2}(c_2, \dots, c_n)$
- $\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)$  är invariant under reversering av variablernas ordning
- $\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n) = c_n \mathcal{L}_{n-1}(c_0, \dots, c_{n-1}) + \mathcal{L}_{n-2}(c_0, \dots, c_{n-2})$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper  
Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Beviskiss.

Induktion över  $n$ .

Induktionsantagandet ger

$$[c_0, \dots, c_n] = \frac{\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)}{\mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n)}$$

Då

$$\begin{aligned} [c_0, \dots, c_n, c_{n+1}] &= c_0 + \frac{1}{[c_1, \dots, c_n]} \\ &= c_0 + \frac{\mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n)}{\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)} \\ &= c_0 + \frac{\mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n)}{\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)} \\ &= \frac{c_0 \mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n) + \mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n)}{\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)} \\ &= \frac{\mathcal{L}_{n+1}(c_0, \dots, c_n, c_{n+1})}{\mathcal{L}_n(c_1, \dots, c_n, c_{n+1})} \end{aligned}$$



Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

- $\mathcal{L}_0(c_0) = c_0$
- $\mathcal{L}_1(c_0, c_1) = c_0 c_1 + 1$
- $\mathcal{L}_2(c_0, c_1, c_2) = c_0 \mathcal{L}_1(c_1, c_2) + \mathcal{L}_0(c_0) = c_0(c_1 c_2 + 1) + c_0 = c_0 c_1 c_2 + c_0 + c_2$
- $[c_0, c_1, c_2] = \frac{c_0 c_1 c_2 + c_0 + c_2}{c_1 c_2 + 1}$
- $[3, 5, 7] = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 + 3 + 7}{5 \cdot 7 + 1}$

- Bevis för vissa påståenden kommer, vissa får ni läsa på egen hand

- Kom ihåg:

$$[c_0, \dots, c_{n+1}] = [c_0, \dots, c_{n-1}, c_n + \frac{1}{c_{n+1}}] = c_0 + \frac{1}{[c_1, \dots, c_{n+1}]} = [c_0, [c_1, \dots, c_{n+1}]]$$

- $[c_0, \dots, c_n] = \frac{\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n)}{\mathcal{L}_{n-1}(c_1, \dots, c_n)} = \frac{A_n}{B_n}$

- $[c_0] = c_0 = \frac{c_0}{1} = \frac{A_0}{B_0}$

- $[c_0, c_1] = c_0 + \frac{1}{c_1} = \frac{c_0 c_1 + 1}{c_1} = \frac{A_1}{B_1}$

- $\mathcal{L}_n(c_0, \dots, c_n) = c_n \mathcal{L}_{n-1}(c_0, \dots, c_{n-1}) + \mathcal{L}_{n-2}(c_0, \dots, c_{n-2})$

- $A_n = c_n A_{n-1} + A_{n-2}$

- $B_n = c_n B_{n-1} + B_{n-2}$

- $\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = c_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} A_n & A_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper  
Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk



Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

**Konvergener**

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- $\begin{vmatrix} c_n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
- $\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_0 c_1 + 1 \\ 1 & c_1 \end{vmatrix} = -1$
- $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = \begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ B_1 & B_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} c_n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$
- Så om  $c_i$  pos heltal, så  $\gcd(A_i, B_i) = 1$
- Låt  $\alpha = \alpha_n = [c_0, \dots, c_n] = \frac{A_n}{B_n}$ . Då gäller, för  $1 \leq i \leq n$ , att  

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = \frac{(-1)^{i-1}}{B_i B_{i-1}}$$
- Vidare  $|\alpha - \alpha_i| < |\alpha - \alpha_{i-1}|$
- Vidare  $\alpha_0 < \alpha_2 < \cdots < \alpha < \cdots < \alpha_3 < \alpha_1$

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel  
Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- Studera  $ax - by = 1$ ,  $\gcd(a, b) = 1$
- Antag  $\frac{a}{b} = [c_0, \dots, c_n]$
- Sista konvergenten är  $\frac{A_n}{B_n} = \frac{a}{b}$
- Från  $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1}$  får vi  $a B_{n-1} - A_{n-1} b = (-1)^{n-1}$
- Om  $n$  udda:  $x = B_{n-1}$ ,  $y = A_{n-1}$
- Om  $n$  jämn:  $[c_0, \dots, c_n] = [c_0, \dots, c_n - 1, 1]$ , gör som ovan

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

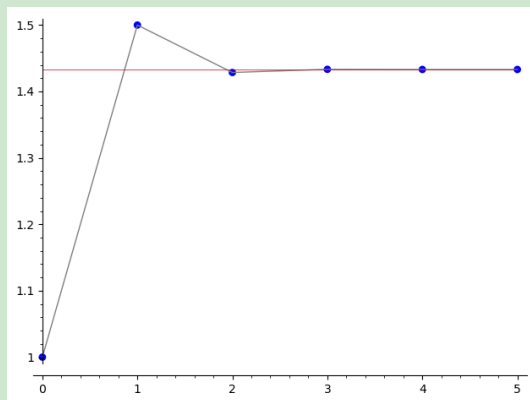
## Exempel

Det rationella talet  $\frac{1393}{972} \approx 1.43312757201646$  har följande konvergener:

i	KB	konvergent	värde
0	[1]	1	1.0000000000000000
1	[1,2]	3/2	1.5000000000000000
2	[1,2,3]	10/7	1.42857142857143
3	[1,2,3,4]	43/30	1.4333333333333333
4	[1,2,3,4,5]	225/157	1.43312101910828
5	[1,2,3,4,5,6]	1393/972	1.43312757201646

## Exempel

Konvergenterna konvergerar till det exakta värdet så här:



Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper  
Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel  
Konvergenter

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Ändliga  
kedjebråk

Exempel,  
egenskaper

Existens och  
unikhet

KB som  
rationella  
funktioner

Eulers regel

Konvergener

Tillämpning:  
Linjära  
diofantiska

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

Diofantisk ekvation  $474x - 151y = 1$ . KB är

$$[3, 7, 5, 4] = \frac{474}{151},$$

och näst sista konvergenten är

$$[3, 7, 5] = \frac{113}{36}$$

Enär  $n = 3$  är udda,  $x = 36$ , så borde  $y = 113$  vara en lösning. Vi ser att

$$474 * 36 - 151 * 113 = 1$$

## Exempel

Vill lösa  $113x - 36y = 1$ . Kedjebråket är

$$[3, 7, 5] = \frac{113}{36}$$

och näst sista konvergenten är

$$[3, 7] = \frac{22}{7}$$

Eftersom  $n = 2$  är jämn, så borde  $x = 7$ ,  $y = 22$  vara en lösning till den linjära Diofantiska ekvationen med HL  $-1$ .

Kontroll:

$$113 * 7 - 36 * 22 = -1$$

HL = 1: vi skriver

$$[3, 7, 5] = [3, 7, 4, 1], \quad [3, 7, 4] = \frac{91}{29}$$

och får  $x = 29$ ,  $y = 91$ , vilket löser ursprungsekvationen.

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebräksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- Innan vi börjar med oändliga kedjebråk så gör vi om teorin för ändliga sådana
- Jag har baserat framställningen på **Stein**, *Elementary Number Theory*
- Antag  $a_0, a_1, \dots$  positiva reella tal ( $a_0$  kan få vara noll). Jag upprepar,  $a_i$  behöver inte vara heltal (ännu).
- För  $0 \leq n \leq m$ , så ges den  $n$ :e konvergenten till kedjebråket  $[a_0, \dots, a_m]$  av  $c_n = [a_0, \dots, a_n]$ . Dessa konvergener, för  $n < m$ , kallas även för *partiella konvergener*.
- $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right]$

## Teorem

För varje  $n$  med  $-2 \leq n \leq m$ , definiera  $p_n$  och  $q_n$  som följer:

$$\begin{array}{lll} p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1, & p_0 = a_0 \\ q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0, & q_0 = 1 \end{array}$$

och för  $n \geq 1$ ,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Då gäller för  $0 \leq n \leq m$  att

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

(sista likheten då  $n \geq 1$ )



## Bevis.

Induktion över  $n$ , basfallen  $n = 0, 1$  uppenbara. Antag satsen gäller för alla kedjebråk av längd  $\leq n - 1$ . Då

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_n] &= [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}] \\ &= \frac{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) q_{n-2} + q_{n-3}} \\ &= \frac{(a_{n-1}a_n + 1)p_{n-2} + a_n p_{n-3}}{(a_{n-1}a_n + 1)q_{n-2} + a_n q_{n-3}} = \frac{a_{n-1}a_n p_{n-2} p_{n-2} + a_n p_{n-3}}{a_{n-1}a_n q_{n-2} + q_{n-2} + a_n q_{n-3}} \\ &= \frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{p_n}{q_n}. \end{aligned}$$



## Teorem

För  $0 \leq n \leq m$  så

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \quad (1)$$

och

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n. \quad (2)$$

Vi kan uttrycka detta som

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

och

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

## Bevis.

Induktion över  $n$ , fallet  $n = 0$  klart. Antag  $n > 0$  och påståendet samt för  $n - 1$ .  
Då

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ &= -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Detta visar (1). För (2) så har vi att

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ &= (-1)^n a_n. \end{aligned}$$



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebräksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergenter,  
repetition

Kedjebräksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Teorem

*Konvergenter  $c_{2n}$  med jämnt index växer strängt med  $n$ , och de med udda index avtar strängt med  $n$ . Vidare så är de udda konvergenterna  $c_{2n+1}$  alla större än samtliga jämna konvergenter  $c_{2m}$ .*

## Bevis

Alla  $a_n > 0$  för  $n \geq 1$  så alla  $q_n > 0$ . Enligt tidigare sats så för  $n \geq 2$  gäller

$$c_n - c_{n-2} = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{q_n q_{n-2}},$$

vilket om  $n$  jämnt visar att konvergenter med jämna index växer, och om  $n$  är udda visar att konvergenter med udda index avtar.

## Bevis (forts)

Antag (för att få motsägelse) att finns heltal  $r, m$  så att  $c_{2m+1} < c_{2r}$ .

Tidigare sats ger:

$$c_n - c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

har tecken  $(-1)^{n-1}$ , så för alla  $s \geq 0$  gäller att  $c_{2s+1} > c_{2s}$ .

- $r = m$  alltså omöjligt.
- Om  $r < m$  så  $c_{2m+1} < c_{2r} < c_{2m}$  enligt vad vi visade ovan (vi når  $2m$  från  $2r$  genom att öka med två ett antal gånger). Det ger en motsägelse med  $s = m$ .
- Om  $r > m$  så  $c_{2r+1} < c_{2m+1} < c_{2r}$  vilket ger en motsägelse med  $s = r$ .

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebräksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergenter,  
repetition

Kedjebråksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- Låt  $x \in \mathbb{R}$ . Vi skall hitta en “oändlig kedjebråksutveckling” till  $x$ . Om  $x$  råkar vara rationell, blir utvecklingen ändlig, och samma som tidigare.

- Skriv

$$x = a_0 + t_0$$

med  $a_0 \in \mathbb{Z}$  och  $0 \leq t_0 < 1$ . Med andra ord så är  $a_0$  heltalsdelen av  $x$ , vi kan skriva  $a_0 = \lfloor x \rfloor$ . På samma sätt är  $t_0$ , den fraktionella biten.

- Om  $t_0 \neq 0$ , skriv

$$\frac{1}{t_0} = a_1 + t_1$$

med  $a_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_1 > 0$ , och  $0 \leq t_1 < 1$ .

- Så  $t_0 = \frac{1}{a_1 + t_1} = [0, a_1 + t_1]$ , vilket är en slags kedjebråksutveckling (ej nödvänkel) av  $t_0$ .



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebråksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- Fortsätt på samma sätt så länge  $t_n \neq 0$ , skriv

$$\frac{1}{t_n} = a_{n+1} + t_{n+1}$$

med  $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{n+1} > 0$ , och  $0 \leq t_{n+1} < 1$ .

- Vi kallar denna procedur, som tilldelar ett reellt tal  $x$  heltalsföljden  $a_0, a_1, a_2, \dots$  för *kedjebråksprocessen*.
- Den ger en bijection mellan irrationella tal i  $(0, 1)$  och oändliga följder av naturliga tal

## Exempel

Låt  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , gyllene snittet. Då

$$x = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

så  $a_0 = 1$  and  $t_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . Vi får att

$$\frac{1}{t_0} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

så  $a_1 = 1$  och  $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . På samma sätt så  $a_n = 1$  för alla  $n$ .

Vi skall se att det är meningsfullt att hävda att

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

## Lemma

För  $n$  så att  $a_n$  är definierad så

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_n + t_n],$$

och om  $t_n \neq 0$ , så  $x = [a_0, a_1, \dots, a_n, \frac{1}{t_n}]$ .

## Bevis.

Innduktion, basfallet  $n = 0$  OK.

Om andra påståendet sant för  $n - 1$  så

$$\begin{aligned} x &= \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \frac{1}{t_{n-1}} \right] \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + t_n] \\ &= \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \frac{1}{t_n} \right]. \end{aligned}$$

På samma sätt får vi att första påståendet sant för  $n - 1$  gör det sant även för  $n$ . □

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebräksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

## Teorem

Låt  $a_0, a_1, \dots$  vara en följd av heltal med  $a_n > 0$  för  $n \geq 1$ . För  $n \geq 0$ , sätt  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Då existerar gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

## Bevis.

För  $m \geq n$  är  $c_n$  den partiella konvergenten till  $[a_0, \dots, a_m]$ . Vi vet att

- $c_{2n}$  strängt växande
- $c_{2n+1}$  strängt avtagande
- jämna konvergenter  $\leq c_1$  och udda  $\geq c_0$

Alltså existerar både  $\alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n}$  och  $\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1}$ , och both  $\alpha_0 \leq \alpha_1$ . Slutligen noterar vi att

$$|c_{2n} - c_{2n-1}| = \frac{1}{q_{2n} \cdot q_{2n-1}} \leq \frac{1}{2n(2n-1)} \rightarrow 0,$$

så  $\alpha_0 = \alpha_1$ .



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebråksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Teorem

Låt  $x \in \mathbb{R}$ . Om  $x$  är rationellt så är det lika med  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  för något  $n$ , och om  $x$  är irrationellt så är

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_0, \dots, x_n],$$

där  $a_n$  ges av kedjebråksprocessen.

## Proof

- Följden ändlig omm något  $t_n = 0$ , vilket ger första delen
- Antag följdens oändlig, så  $t_n \neq 0$  för alla  $n$
- Då

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_n, \frac{1}{t_n}].$$

- Enligt tidigare resultat så

$$x = \frac{\frac{1}{t_n} \cdot p_n + p_{n-1}}{\frac{1}{t_n} \cdot q_n + q_{n-1}}.$$

## Bevis (forts)

Så om  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , så

$$\begin{aligned}x - c_n &= x - \frac{p_n}{q_n} \\&= \frac{\frac{1}{t_n} p_n q_n + p_{n-1} q_n - \frac{1}{t_n} p_n q_n - p_n q_{n-1}}{q_n \left( \frac{1}{t_n} q_n + q_{n-1} \right)} \\&= \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n \left( \frac{1}{t_n} q_n + q_{n-1} \right)} \\&= \frac{(-1)^n}{q_n \left( \frac{1}{t_n} q_n + q_{n-1} \right)}.\end{aligned}$$



## Bevis (forts)

Alltå har vi att

$$\begin{aligned} |x - c_n| &= \frac{1}{q_n \left( \frac{1}{t_n} q_n + q_{n-1} \right)} \\ &< \frac{1}{q_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vi använde att  $a_{n+1}$  är heltalsdelen av  $\frac{1}{t_n}$ , och följaktligen  $< \frac{1}{t_n}$ .

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Partiella  
konvergener,  
repetition

Kedjebräksprocessen

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$  tät i  $\mathbb{R}$
- Så givet  $\alpha \in \mathbb{R}$  och  $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$  finns det  $p, q \in \mathbb{Z}$  med  $|\alpha - \frac{p}{q}| < \epsilon$
- Dock kan  $|q|$  vara väldigt stor
- Vill ha bra kompromiss, god approximation, inte för stor täljare
- Kedjebråk ger “bevisligen bästa” approximationen! Kan teoretiskt användas för att visa att vissa reella tal saknar “bra approximationer”.
- Tillämpningar
  - Bevisa olikheter
  - Känna igen  $\alpha$  som ett rationellt tal
  - Visa att  $\alpha$  inte är ens algebraiskt (Roths sats)

## Lemma

För  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z} \ni N > 1$ , så finns  $p, q \in \mathbb{Z}$  med

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{N}, \quad |q| \leq N$$

## Bevis.

Kan anta  $0 < \alpha$ . Tag  $q = N$ ,  $p = \lfloor \alpha N \rfloor$ .



## Exempel

$\alpha = \sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $N = 70$ .  $q = N = 70$ ,  $p = \lfloor 70\sqrt{2} \rfloor = 98$ ,  
 $r = p/q = 98/70 = 7/5$ , och felet är

$$|\frac{7}{5} - \sqrt{2}| \approx 0.0142 < 1/70$$

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

## Teorem

För  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z} \ni N > 1$ , så finns  $p, q \in \mathbb{Z}$  med

$$|\alpha q - p| < \frac{1}{N}, \quad |q| \leq N$$

Dvs när  $\alpha > 0$  så

$$|\alpha - p/q| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}$$

## Bevis

- Betrakta de  $N + 1$  reella talen

$$\{0\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\} \in [0, 1)$$

- Dela upp  $[0, N)$  i  $N$  delintervall

$$\left[0, \frac{1}{N}\right), \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \dots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right)$$

- Åtminstone en "kollision":  $i < j$ , och  $m$  så att

$$\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in \left[\frac{m}{N}, \frac{m+1}{N}\right)$$

## Bevis (forts)

- $q = j - i, 0 < q \leq N$
- $i\alpha = s + \{i\alpha\}, j\alpha = t + \{j\alpha\}$
- $(j - i)\alpha = t - s + \{j\alpha\} - \{i\alpha\}$
- $p = t - s$ , så

$$|q\alpha - p| = |(j - i)\alpha - (t - s)| = |\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N}$$

## Teorem (Kronecker)

*Antag att  $\alpha$  är irrational. För ett godtyckligt reellt tal  $\beta$ , och godtyckligt  $\epsilon > 0$ , så finns heltal  $A, c$  med*

$$|A\alpha - c - \beta| < \epsilon$$

*Så*

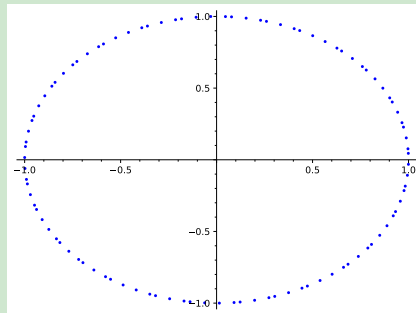
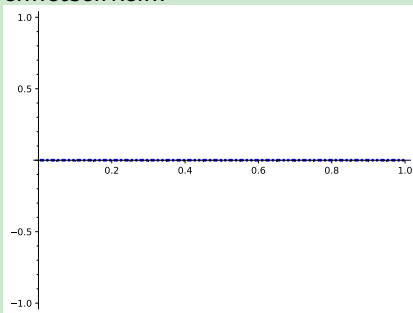
$$|A\alpha - \beta - c| < \epsilon$$

*Med andra ord så är följden  $(\{n\alpha\})_{n=1}^{\infty}$  tät i  $[0, 1)$ .*



## Exempel

Följden  $(\{n\sqrt{2}\})_{n=1}^{100}$  ser ut så här, direkt på tallinjen, eller upprullad på enhetscirkeln:



## Bevis

- Dirichlet: finns heltal  $a, b$  med  $|a\alpha - b| < \epsilon$ ,  $0 < a \leq \frac{1}{\epsilon}$
- $\alpha$  irrational, så  $0 < |a\alpha - b|$
- Kan anta att  $a\alpha - b > 0$ , så

$$0 < a\alpha - b = \{a\alpha\} < \epsilon$$

- Vi har att

$$0, \{1a\alpha\}, \{2a\alpha\}, \dots \in [0, 1)$$

och avståndet mellan två närliggande punkter är  $< \epsilon$ . Ty

$\{1a\alpha\} = \{a\alpha\} = a\alpha - b < \epsilon$ , och  $\{(n+1)a\alpha\} - \{na\alpha\}$  är antingen  $\{a\alpha\}$ , eller så "slår det runt" och dessa punkter är inte närliggande

## Bevis (forts)

- Så det finns något heltal  $k$  så att

$$\{ka\alpha\} \leq \{\beta\} < \{(k+1)a\alpha\}$$

dvs  $\{\beta\}$  ligger instängt i ett intervall med längd  $< \epsilon$ .

- Så

$$0 < \{\beta\} - \{ka\alpha\} < \epsilon$$

- Alltså finns heltal  $A, c$  med

$$|A\alpha - \beta - c| < \epsilon$$

Kom ihåg:

## Teorem (Konvergens av kedjebråk)

Låt  $a_0, a_1, \dots$  definiera ett enkelt kedjebråk, dvs  $x = [a_0, a_1, \dots] \in \mathbb{R}$ . Då gäller för alla positiva heltal  $m$  att

$$\left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{1}{q_m \cdot q_{m+1}} < \frac{1}{m^2}.$$

Med andra ord så

$$|xq_m - p_m| < \frac{1}{q_{m+1}} < \frac{1}{m+1}.$$

Ett *algebraisk tal* är ett reelt tal som är roten till en polynomekvation med heltalskoefficienter, som tex alla kvadratrötter.

Man kan tycka att algebraiska tal är mer lika rationella tal än övriga rella tal, och alltså borde kunna approximeras väl med rationella tal. Dock är det precis tvärtom!

### **Teorem (Roth)**

Låt  $\alpha \in \mathbb{R}$  och antag finns  $\epsilon > 0$  så att  $\epsilon$  such that

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

för oändligt många olika rationella tal  $\frac{p}{q}$ . Då måste  $\alpha$  vara transcendent.

## Exempel

Låt  $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000\dots$ . Då är

$$\alpha - \sum_{n=1}^N 10^{-n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} < 10^{-N!},$$

vilket är pyttelitet i jämförelse med täljaren till det rationella talet  $\sum_{n=1}^N 10^{-n!}$ , som är  $\leq 10^N$ .

Alltså är  $\alpha$  inte algebraiskt.

Kedjebråkskonvergener ger de bästa rationella approximationerna!

## Teorem

Låt  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $s, r \in \mathbb{Z}$ . Låt, för varje positivt heltal  $k$ ,  $c_k = p_k/q_k$  vara den  $k$ :e partiella konvergenten till kedjebråksutvecklingen  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ .

Då gäller:

- Om  $|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|$  så  $s \geq q_{k+1}$
- Om  $\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$  så  $s > q_k$
- Om  $\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}$  så är  $\frac{r}{s}$  någon partiell konvergent till  $\alpha$ .

## Bevis.

Allt står i kursboken, och är lite bökigt, så vi nöjer oss med att visa hur det andra påståendet följer från det första.

Om  $s \leq q_k$  och  $|\alpha - r/s| < |\alpha - p_k/q_k|$  så multiplicera ihop olikheterna. Vi får då

$$s|\alpha - r/s| < q_k|\alpha - p_k/q_k|$$

varför

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|,$$

vilket är en motsägelse.





Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- $0 < \alpha \in \mathbb{R}$
- Studera linjen  $y = \alpha x$  med lutning  $\alpha$
- Gitterpunkter  $(q, p) \in \mathbb{Z}^2$  som är nära linjen svara mot rationella approximationer  $p/q$  som är nära  $\alpha$
- Om  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  så delar linjen in mängden gitterpunkter (i positiva kvadranten) i två delar, en ovanför linjen och en under
- Hörnen till det konvexa höljet av dessa delmängder svarar mot "bästa approximationer", dvs partiella konvergenter

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

- Rekursionsrelationerna

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

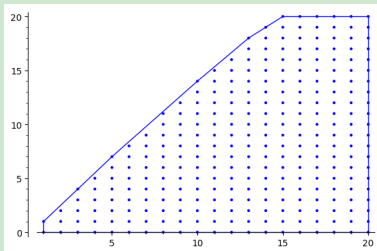
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

kan ges en vektortolkning:

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{n-2} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}$$

## Exempel

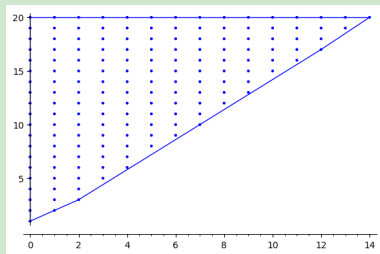
Tag  $\alpha = \sqrt{2}$ . Istället för att titta på oändligt många gitterpunkter så nöjer vi oss med att dela upp  $[0, 20]^2$  i två delar, de med  $y > \sqrt{2}x$ , och de med  $y < \sqrt{2}x$ .



Hörn till konvexa höljet (inte på axlarna) är tex  $(1, 1)$ ,  $(5, 7)$

## Exempel

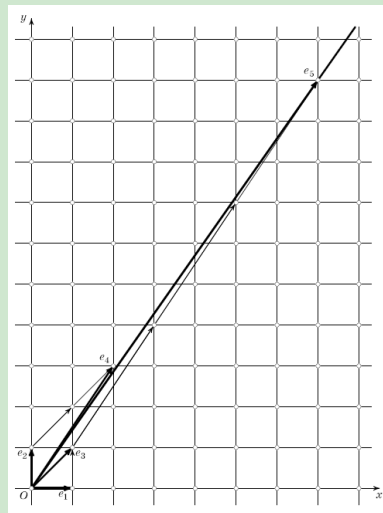
Gitterpunkterna ovanför linjen  $y = \sqrt{2}x$  ser ut så här:



Här är hörnpunkter till konvexa höljet tex:  $(2, 3)$ ,  $(12, 17)$

Vi beräknar kedjebråksutvecklingen till  $\sqrt{2}$  och dess konvergenter.

$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$  och har partiella konvergenter  $1, 3/2, 7/5, 17/12, \dots$



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Känna igen ett  
rationellt tal

Kalender  
Huygens  
planetarium

Periodiska  
kedjebråk

- Allmän princip: om  $a_n$  stor så  $|[a_0, \dots, a_{n-1}] - [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n]|$  liten
- Vi hugger av här, det blir en bra approximation
- Kanske är det faktiskt det sanna värdet?

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Känna igen ett  
rationellt tal

Kalender  
Huygens  
planetarium

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

- $\alpha = \frac{1234}{6789} \approx 0.181764619237001\ 0310796877301517160$   
11194579466784504345 26439829135366033289 14420385918397407571  
07084990425688613934 3054941817646192
- Eftersom  $\gcd(1234, 6789) = 1$  och  $\gcd(2, 6789) = 1$  och  $\gcd(5, 6789) = 1$   
och  $\text{ord}_{6789}(10) = 120$ , så ger thm 12.4 i Rosen att decimalutvecklingen av  
 $\alpha$  är periodisk med period 120 och preperiod 0. Ni ser hur 181764etc  
upprepas mot slutet
- Så om ni endast får "strömmen" av decimalutvecklingen, så behövs  
åtminstone 120 decimaler innan ni korrekt kan känna igen det som det  
rationella talet  $\frac{1234}{6789}$ .

## Exempel

- Kedjebråksutvecklingen är ändlig,  
 $\alpha = [0; 5, 1, 1, 153, 1, 3] = [0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 1]$ .
- Vi beräknar kedjebråksutvecklingarna till trunkeringarna av decimalutvecklingen till  $\alpha$ .
- Dessa blir så småningom  $[0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 1, \textit{GIGANTISK}, \textit{tjo}, \textit{tjom}, \dots]$ .
- Om vi hugger av innan GIGANTISK får vi rätt värde.
- Om vi hugger av innan 153 får vi

$$[0; 5, 1, 1] = 2/11 = 0.1818\dots$$

vilket är en bra approximation (för det priset!) men inte exakt.

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Känna igen ett  
rationellt tal

Kalender  
Huygens  
planetarium

Periodiska  
kedjebråk



	k	$n(\alpha, k)$	CF
Ändliga kedjebråk	1	0.1	[0; 10]
Oändliga kedjebråk	2	0.18	[0; 5, 1, 1, 4]
Diofantisk approximation	3	0.181	[0; 5, 1, 1, 9, 1, 1, 4]
	4	0.1817	[0; 5, 1, 1, 69, 2, 1, 1, 2]
Geometrisk tolkning	5	0.18176	[0; 5, 1, 1, 141, 2]
	6	0.181764	[0; 5, 1, 1, 151, 1, 73, 2]
Tillämpningar	7	0.1817646	[0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 4, 5, 1, 2]
Känna igen ett rationellt tal	8	0.18176461	[0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 54, 7, 1, 2]
Kalender	9	0.181764619	[0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 1, 90, 1, 3, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 1, 2]
Huygens planetarium	10	0.1817646192	[0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 1, 585, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 19]
Periodiska kedjebråk	11	0.18176461923	[0; 5, 1, 1, 153, 1, 2, 1, 3098, 3, 1, 1, 18, 1, 4, 1, 5]

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar  
Känna igen ett  
rationellt tal

Kalender  
Huygens  
planetarium

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

Antal dagar (rotationer runt jordaxeln) under ett år (ett varv i omloppsbanan runt solen) är ungefär

$$\alpha = 365.2422 = [365, 4, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 2]$$

Andra konvergenten är

$$\alpha \approx 365.25 = 365 + \frac{1}{4}$$

vilket leder till en enkel kalender med ett skotår var fjärde år, och inga övriga krusiduller.

## Exempel (contd)

Fjärde konvergenten ger

$$\alpha \approx [365, 4, 7, 1] = 365 + \frac{8}{33} \approx 365.2424 \dots$$

Den Gregorianska kalendern har

- Ett skottår vart fjärde år
- Fast inte om årtalet är delbart med 100
- Fast, om det är delbart med 100 och 400, så är det ändå skottår

Antalet dagar per år blir alltså

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 146097/400 = [365, 4, 8, 12] = 365.2425$$

vilket är mycket nära  $365 + \frac{8}{33} \approx 365.2424$

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar  
Känna igen ett  
rationellt tal

Kalender  
Huygens  
planetarium

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel (Månkalender)

Antalet lunationer (månvarv runt jorden) under ett år är cirka

$$\beta \approx 12.368267 \approx [12; 2, 1, 2, 1, 1, 17, 2, 2, 15]$$

Låt oss använda den femte konvergenten

$$[12; 2, 1, 2, 1, 1] = 235/19$$

för att förklara 19-årscyklerna i den hebreiska kalendern:

$$235 = 19 * 12 + 7$$

och den Hebreiska kalendern stoppar in 7 extra månader per 19-årig (Metonisk) cykel.

Ändliga  
kedjebråkOändliga  
kedjebråkDiofantisk  
approximationGeometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Känna igen ett  
rationellt tal  
KalenderHuygens  
planetariumPeriodiska  
kedjebråk

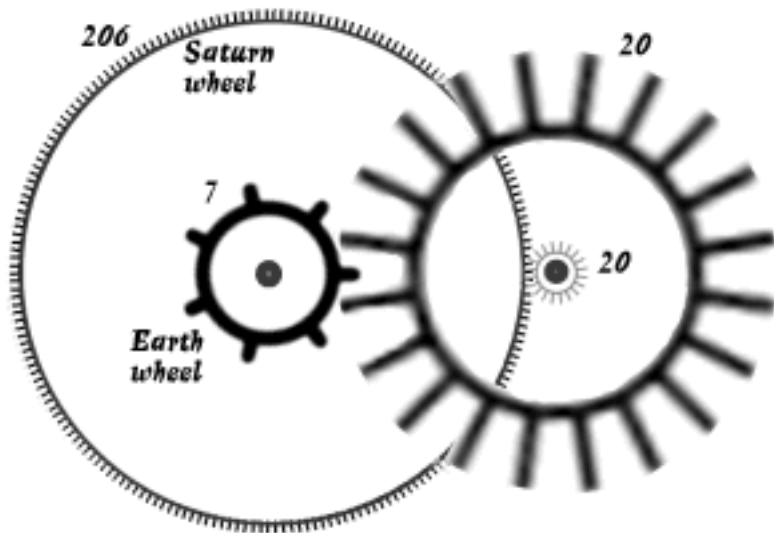
Huygens mekaniska modell av solsystemet använde kugghjul för att få till proportionerliga planetbanor. Som ett exempel så är Saturnus omloppstid (mätt i jordår) ungefär

$$\frac{77708431}{2640858} = 29.425448 \dots = [29, 2, 2, 1, 5, 1, 4, \dots]$$

Om vi använder den fjärde konvergenten

$$[29, 2, 2, 1] = \frac{206}{7}$$

så behöver vi ett kugghjul med 7 tänder för jorden, och det griper in i ett med 206 tänder, för Saturnus.



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Känna igen ett  
rationellt tal

Kalender

Huygens  
planetarium

Periodiska  
kedjebråk

## Exempel

Det "gyllene snittet"  $\Phi$  är förhållandet  $\Phi = x$  mellan längsta sidan  $\ell x$  och kortaste sidan  $\ell$  i en rektangel, där

$$\frac{\ell + \ell x}{\ell x} = \frac{\ell x}{\ell} = x$$

Rektanglar med detta förhållande mellan sina sidor ger en unik skönhetsupplevelse!

Vi ser att  $\phi$  är den positiva roten till

$$x^2 = x + 1,$$

så

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Vi itererar och ser att

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \dots = [1, 1, 1, \dots]$$

## Definition

- Ett oändligt KB  $\alpha$  är periodiskt med (minsta) period  $k$  och preperiod  $N$  om

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

med

- $a_{m+k} = a_m$  för alla  $m \geq N$
  - $k$  minst med denna egenskap
  - $N$  minst med denna egenskap
- Vi skriver

$$\alpha = [a_0, \dots, a_{N-1}, \overline{a_N, \dots, a_{N+k-1}}]$$

- Om preperioden är 0 så har  $\alpha$  en rent periodisk KB-utveckling



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk  
irrationalitet

Lagranges sats

## Exempel

- Låt  $\alpha_0 = \alpha = \sqrt{2}$
- $a_0 = \lceil \alpha_0 \rceil = 1$ ,  $t_0 = \alpha_0 - a_0 = \sqrt{2} - 1$
- $\alpha_1 = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$
- $a_1 = \lceil \alpha_1 \rceil = 2$ ,  $t_1 = \alpha_1 - 2 = \sqrt{2} - 1 = t_0$
- $\alpha_2 = \alpha_1$ , men vi har alltid  $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$
- Så  $\alpha_1$  är en lösning till  $t = 2 + \frac{1}{t}$ , eller  $t^2 - 2t - 1 = 0$ , och  $\alpha_1 = [2, 2, 2, \dots] = [\overline{2}]$
- Slutligen ser vi att  $\alpha = \alpha_1 - 1 = [1, 2, 2, \dots] = [1, \overline{2}]$

## Exempel

Antag att

$$\beta = [3, 5, \overline{7, 11}]$$

$$\gamma = [\overline{7, 11}]$$

Då

$$\gamma = 7 + \frac{1}{11 + 1/\gamma} = 7 + \frac{\gamma}{11\gamma + 1} = \frac{78\gamma + 7}{11\gamma + 1}$$

så  $\gamma$  är en rot till

$$11t^2 - 77t - 7,$$

i själva verket så  $\gamma = \frac{9}{22}\sqrt{77} + \frac{7}{2}$ . Vidare:

$$\beta = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\gamma}} = \frac{9}{442}\sqrt{77} + \frac{1333}{442}$$

## Definition

- Låt  $\alpha \in \mathbb{R}$  vara algebraisk över  $\mathbb{Q}$ , med  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ , id est,  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  and finns  $A, B, C \in \mathbb{Z}$  så att  $\alpha$  rot till

$$At^2 + Bt + C = 0$$

Då kallas  $\alpha$  för en kvadratisk irrationalitet.

- Den andra roten till ekvationen kallas för det algebraiska konjugatet till  $\alpha$ , och betecknas  $\alpha'$ . Så

$$At^2 + Bt + C = A(t - \alpha)(t - \alpha')$$

- $\alpha$  är **reducerad** om  $\alpha > 1$  och  $-1 < \alpha' < 0$

## Lemma

Låt  $\alpha$  vara k.i.

- Om  $r, s, t, u$  heltal så

$$\frac{r\alpha + s}{t\alpha + u} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

och följaktligen rationell eller k.i.

- $\alpha = (a + \sqrt{b})/c$  med  $a, b, c$  heltal,  $b > 0$ ,  $b$  ej kvadrat
- Då  $\alpha' = (a - \sqrt{b})/c$
- Konjugering ger kroppsautomorfism på  $\mathbb{Q}(\alpha)$  genom

$$(r\alpha + s)' = r\alpha' + s$$

## Lemma

Om  $\alpha$  k.i. så

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}$$

med  $P, Q, d$  heltal,  $d > 0$ ,  $d$  ej kvadrat,  $Q \mid (d - P^2)$

## Bevis.

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c} = \frac{|c|a + |c|\sqrt{b}}{|c|c} = \frac{|c|a + \sqrt{bc^2}}{|c|c} = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}$$



## Teorem (Lagrange)

*KB-utvecklingen till det reella talet  $x$  är*

- *ändligt omm  $x$  rationellt*
- *så småningom periodiskt omm  $x$  k.i.,*
- *rent periodiskt omm  $x$  reducerad k.i.*

## Exempel

- $\frac{173}{37} = [4, 1, 2, 12]$
- $\frac{5+\sqrt{3}}{2} = [3, \overline{2}, 1]$
- $\frac{1+\sqrt{3}}{2} = [\overline{1}, 2]$

## Teorem

Låt  $\alpha$  vara en k.i. Följande algoritm beräknar KB-utvecklingen till  $\alpha$ :

### ① INITIALIZE:

- $\alpha_0 = \alpha$
- $\alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0}$
- $k = 0$

### ② UPDATE:

- $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$
- $P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$
- $Q_{k+1} = (d - P_{k+1}^2) / Q_k$

Det kommer att finnas något  $n$  så att för  $k > n$ ,  $0 < Q_k \leq d$ ,  $-\sqrt{d} < P_k < \sqrt{d}$ , så till slut så finns  $N, \ell$  så att  $P_N = P_{N+\ell}$ ,  $Q_N = Q_{N+\ell}$ , och algoritmen börjar upprepa sig.

Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk  
irrationalitet

Lagranges sats

## Exempel

- $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{5} = \frac{0+\sqrt{5}}{1}$
- $a_0 = 2, P_0 = 0, Q_1 = 1$
- $P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 2, Q_1 = (5 - P_1^2)/Q_0 = 1$
- $\alpha_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{1}, a_1 = 4$
- $P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 2, Q_2 = (5 - P_2^2)/Q_1 = 1$
- Upprepar:  $\sqrt{5} = [2, \bar{4}]$



Ändliga  
kedjebråk

Oändliga  
kedjebråk

Diofantisk  
approximation

Geometrisk  
tolkning

Tillämpningar

Periodiska  
kedjebråk

Gyllene snittet

Kvadratisk  
irrationalitet

Lagranges sats

- • K.I
- så småningom periodisk KB  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$
- 1-automatisk, i.e. spottas ut av ändlig tillståndsautomat med "input alphabet" av storlek ett
- Högre grad (kubrötter e dyl): KB ej automatisk följd
- Khintchine: för "nästan alla" reella tal så kommer det geometriska medelvärdet  $\left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{1/n}$  att gå mot Khintchines konstant!
- Ingen struktursats för KB till algebraiska tal, men de kan beräknas effektivt

## Exempel

- $f_0(t) = t^3 - 2$ ,  $\alpha_0 = 2^{1/3} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, \dots]$ , det vet vi inte än
- Vad vi vet är att  $1 < \alpha_0 < 2$ , ty  $f_0(1) < 0$  och  $f_0(2) > 0$ , polynom kontinuerliga
- Så  $a_0 = 1$ , (och  $\alpha_1 = [3, 1, 5, 1, 1, 4, \dots]$ )
- $f_1(t) = -t^3 f_0(a_0 + 1/t) = t^3 - 3t^2 - 3t - 1$
- $f_1(3) < 0$ ,  $f_1(4) > 0$ , så  $a_1 = 3$
- $f_2(t) = -t^3 f_1(a_1 + 1/t) = 10t^3 - 6t^2 - 6t - 1$
- $f_2(1) < 0$ ,  $f_2(2) > 0$ , så  $a_2 = 1$
- Et cetera
- Kan visa att varje  $f_k(t)$  har unikt enkelt reellt nollställe, som är  $\alpha_k$ , och som ligger mellan  $a_k$  och  $a_k + 1$ . Kan också visa att  $f(a_k) < 0$ ,  $f(a_k + 1) > 0$