Talteori, Föreläsning 10

Pells ekvation

Jan Snellman[1]

[1]Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Föreläsningsanteckningar på kurshemsidan http://courses.mai.liu.se/GU/TATA54/

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Sammanfattning

Pells ekvation

- Varianter
- Triviala fall
- Samband med KB
- Nya lösningar från gamla

Tillämpningar

Definition

- Pells ekvation är den Diofantiska ekvationen (i x, y)

  $$x^2 - dy^2 = 1$$

  med parametern d ett heltal
- Negativa Pell är

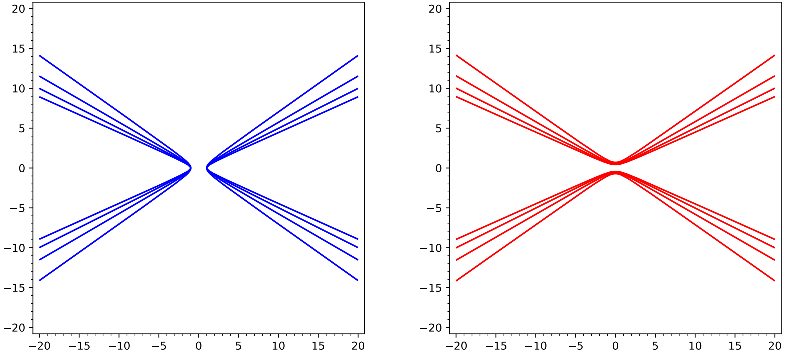
  $$x^2 - dy^2 = -1$$
- Man kan också studera Pell-liknande ekvationer på formen

  $$x^2 - dy^2 = n$$

  där parametern n är ett heltal

Obs: om (x, y) lösning så är $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ också lösningar.

Positiva och negativa Pell



Triviala fall

Vi studerar

$$x^2 - dy^2 = n$$

- Om $d, n < 0$ så ingen lösn
- Om $d < 0$, $n > 0$ så uppfyller lösn $|x| \leq \sqrt{n}$, $|y| \leq \sqrt{n/|d|}$, så ändligt många lösn
- Om $d = D^2$ så

$$n = x^2 - dy^2 = x^2 - D^2y^2 = (x + Dy)(x - Dy)$$

så lösn svarar mot lösn till ekv. sys.

$$\begin{aligned} x + Dy &= a \\ x - Dy &= b \\ ab &= n \end{aligned}$$

Återigen, ändligt många lösn

Samband med KB

Teorem

Antag $0 < d$, $|n| < \sqrt{d}$, d ej kvadrat. Om $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ uppfyller $x^2 - dy^2 = n$, $x, y > 0$, så är x/y en konvergent till KB av $\sqrt{d}$.

Bevis.

Antag $n > 0$, då

$$(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = n,$$

så $x - y\sqrt{d} > 0$, så $x > y\sqrt{d}$, så $\frac{x}{y} - \sqrt{d} > 0$. Då

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{x - \sqrt{d}y}{y} = \frac{x^2 - dy^2}{y(x + y\sqrt{d})} < \frac{|n|}{y(2y\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{2y^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2y^2}$$

En så bra approximation måste härröra från en kedjebråkskonvergent! $\square$

KB till $\sqrt{d}$

Teorem

d positivt heltal, ej kvadrat. Då är KB till $\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$, och motsvarande konvergenter p_k/q_k, kan beräknas som följer:

1. $\alpha_0 = \sqrt{d}$, $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$, $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $p_0 = a_0, q_0 = 1$
2. $\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}$, $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$
3. $P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$, $Q_{k+1} = (d - P_{k+1}^2)/Q_k$
4. $$P_{k+1} p_k - n q_k = -Q_{k+1} p_{k-1}$$ $$p_k - P_{k+1} q_k = Q_{k+1} q_{k-1}$$

För alla k gäller att

$$p_k^2 - d q_k^2 = (-1)^{k+1} Q_{k+1}$$

Teorem

d positivt heltal, ej kvadrat. Låt $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \ldots]$, och låt n vara periodlängden av KB-utveckligen. Låt p_k/q_k vara den k:e konvergenten.

- *Om n jämn, så har negativa Pell inga lösn, och Pell $x^2 - dy^2 = 1$ har lösningarna $x = p_{jn-1}$, $y = q_{jn-1}$, $j = 1, 2, 3 \ldots$*
- *Om n udda, så har negativa Pell lösningarna $x = p_{(2j-1)n-1}$, $y = q_{(2j-1)n-1}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, och Pell lösningarna $x = p_{2jn-1}$, $y = q_{2jn-1}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.*

Bevis.

Läs Rosen. □

Exempel

$\sqrt{17} = [4, \overline{8}]$, så periodlängden är 1. Udda konvergenter är

$$33/8, 2177/528, 143649/34840, 9478657/2298912, \ldots$$

och $33^2 - 17 * 8^2 = 1$.
Jämna konvergenter är

$$268/65, 17684/4289, 1166876/283009, 76996132/18674305, \ldots$$

och $268^2 - 17 * 65^2 = -1$.

Lemma

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

så om (x_1, x_2), (x_2, y_2) *är lösningar till (standard) Pell, så är också* $(x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ *en lösning.*
Speciellt så är $(x_1^2 + dy_1^2, 2x_1y_1)$ *en lösning.*

Bevis.

Uppenbart. $\square$

Märk:

$$(x + \sqrt{d}y)^2 = x^2 + dy^2 + \sqrt{d}2xy.$$

Teorem

1. *Om* (x_1, y_1) *är en lösning till* $x^2 - dy^2 = 1$*, så gäller att om vi skriver*

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^k = x_k + \sqrt{d}y_k,$$

så är (x_k, y_k) *också lösn till (standard) Pell.*

2. *Alla lösn till standard Pell fås på detta sätt från minsta lösn* (x_1, y_1).

Bevis.

1. Lätt.
2. Svårt, läs i Rosen.

$\square$

Exempel

Studera åter

$$x^2 - 17y^2 = 1,$$

med minsta lösn $(x_1, y_1) = (33, 8)$.
Vi beräknar:

$$(33 + 8\sqrt{17})^2 = 33^2 + 17 * 8^2 + 16 * 33 * \sqrt{17} = 2177 + 528\sqrt{17},$$

så $(2177, 528)$ nästa lösn.

Exempel

Eliminerar vi t från systemet

$$x^2 - 21t - 11 = 0$$
$$y^2 - 7t - 9 = 0$$

får vi den Pell-liknande ekv $x^2 - 3y^2 + 16 = 0$.

$$x^2 - 21 * t - 7 = 0$$
$$y^2 - 7 * t - 2 = 0$$

ger $x^2 - 3 * y^2 = 1$.

Exempel

Eftersom $(x, y) = (2177, 528)$ lösn till $x^2 - 17y^2 = 1$, så

$$4.1231 \approx \sqrt{17} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{y} \approx \frac{x}{y} = \frac{2177}{528} \approx 4.1231$$

Summor av på varandra följande heltal

Problem

När är $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=n+1}^{m} k$ *?*

$$
\begin{aligned}
0 = 8RHS - 8LHS &= -4n(n+1) + 4(n+1+m)(m-n) \\
&= -4n^2 - 4n + 4nm - 4n^2 + 4m - 4n + 4m^2 - 4mn \\
&= 4m^2 + 4m - 8n^2 - 8n \\
&= (2m+1)^2 - 1 - 2\Big((2n+1)^2 - 1\Big) \\
&= (2m+1)^2 - 2\Big((2n+1)^2\Big) + 1 \\
&= s^2 - 2t^2 + 1
\end{aligned}
$$

Negativa Pell!

Vi får alltså negativa Pell

$$s^2 - 2t^2 = -1$$

Vi har att

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}}$$

Konvergenterna är

$$\left[1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}\right]$$

Den första udda konvergenten $7/5$ ger lösningen $7^2 - 2 * 5^2 = -1$ till negativa Pell. Så $s = 7 = 2m + 1$, $t = 5 = 2n + 1$ ger $m = 3$, $n = 2$, och

$$\sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3 = \sum_{k=3}^{3} k$$

Den andra udda konvergenten $41/29$ ger lösningen $41^2 - 2 * 29^2 = -1$ till negativa Pell. Så $s = 41 = 2m + 1$, $t = 29 = 2n + 1$ ger $m = 20$, $n = 14$, och

$$\sum_{k=1}^{14} k = 1 + 2 + \cdots + 14 = 105 = \sum_{k=15}^{20} k = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$$