Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
23 Mars 2022
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 8p räcker för betyg 3, 11p för betyg 4, 14p för betyg 5.

Med μ avses Möbiusfunktionen, den multiplikativa funktion som uppfyller $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ för p primtal, och $\mu(n) = 0$ för alla n som delas av kvadraten av ett heltal.

1) Definiera $f(x) = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$ för alla irrationella x. Visa att det finns oändligt många $0 < x < 1$ så att $f(f(x)) = f(x)$.

2) Hitta alla kubrötter till 3 mod 7^n, för $1 \leq n \leq 3$. Hitta sedan alla kubrötter till 3 mod 11^n, för $1 \leq n \leq 3$.

3) Visa att $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$ för alla positiva heltal n.

4) Visa att det finns oändligt många positiva heltal n så att $\mu(n-1) + \mu(n) + \mu(n+1) = 0$. (Ledning: studera kongruensklasser $\mod 900$.)

5) Låt p vara ett primtal, $p \equiv 3 \mod 4$. Låt a vara en kvadratisk residy mod p. Visa att lösningarna till ekvationen
$$x^2 \equiv a \mod p$$
ges av
$$x \equiv \pm a^{n+1} \mod p$$

6) Låt n vara ett positivt heltal som är en summa av tre kuber. Visa att $n \not\equiv 4 \mod 9$ och att $n \not\equiv 5 \mod 9$.

7) Låt q vara ett udda primtal, sådant att även $p = 2q + 1$ är ett udda primtal. Låt a vara ett heltal så att $1 < a < p - 1$. Visa att $p - a^2$ är en primitiv rot mod p.