Lösningsförslag

Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
1 juni 2024
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

1) Sätt $f(x) = x^5 + 2x + 3$. Då är $f(x) \equiv x(x^4 - 1) \mod 3$, så det har nollställena 0,1,-1 modulo 3. Den formella derivatan är $f'(x) = 5x^4 + 2$, så $f'(x) \equiv -(x^4 + 1) \mod 3$. Alltså är $f'(x)$ konstant noll evaluerat på $\mathbf{Z}_3$. Vidare: enligt Hensels lemma så lyfter dessa tre nollställen unikt till nollställen modulo 3^k, för $k \geq 2$. Det finns alltså 3 nollställen modulo 27 och modulo 81. Modulo 27 är dessa 12, 22, och 26.

2) Eftersom $99 = 3^2 * 11$ så ges denna maximala ordning av $\mathrm{mgm}((,\phi)(9), \phi(11)) = \mathrm{mgm}((,6), 10) = 30$, enligt sats 9.22 i Rosen. Vi ser att redan $\mathrm{ord}_{99}(2) = 30$.

3) Parametrisera rationellt genom att skicka $t \in \mathbf{R}$ till den unika skärningspunkten mellan kurvan och linjen med lutning t genom $(-1, 0)$. Explicit så

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \ni t \mapsto \left(\frac{1 + 7t^2}{1 - 7t^2}, \frac{2t}{1 - 7t^2}\right)$$

med invers

$$(x, y) \mapsto \frac{y}{x + 1}.$$

Det ger en bijektion mellan kurvans högra gren och ett intervall av reella linjen; denna bijektion skickar rationella t till rationella punkter, och omvänt. Använd symmetri för att få med vänstra grenen.

4) En punkt (x, y) på kurvan uppfyller antingen $x^2 - 7y^2 = 1$ eller $x^2 - 7y^2 = -1$. Positiva heltalspunkter är således antingen lösningar till Pells ekvation med $d = 7$, eller till "negativa Pell". Kedjebråksutvecklingen är

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

En sats i Rosen ger att om konvergenterna till ovanstående kedjebråksutveckling är P_k/Q_k så ges lösningarna till Pells ekvation av

$$(x, y) = (Q_k,\, P_k) \qquad \text{då } Q_k^2 - 7P_k = 1$$

och motsvarande för negativa Pell. Eftersom periodlängden 4 är jämn, så säger en annan sats i Rosen att negativa Pell saknar lösningar, medan Pell har lösningarna ovan då $k = 3, 7, 11, 15, \ldots$. För $k = 3, 7$ erhålls lösningarna $(8, 3)$ och $(127, 48)$.

Vi kan också få alla lösningar (x_k, y_k) från den primitiva lösningen $(x_1, y_1) = (8, 3)$ via

$$(8 + 3\sqrt{7})^k = x_k + \sqrt{7}y_k$$

Speciellt så är

$$(8 + 3\sqrt{7})^2 = 64 + 2 * 8 * 3 * \sqrt{7} + 3^2 * 7 = 127 + 48\sqrt{7}.$$

5) Låt $\mathbf{1}(n) = 1$ för alla positiva heltal n. Då är $\tau(n) = \sum_{k|n} 1$ så $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$ och

$$h(n) := \sum_{k|n} \tau(k) = (\mathbf{1} * \mathbf{1} * \mathbf{1})(n)$$

Eftersom $\mathbf{1}$ är multiplikativ, är även $h = \mathbf{1} * \mathbf{1} * \mathbf{1}$ det, så det räcker att verifiera likheten för fallet att $n = p^s$ är en primpotens. Delarna till p^s är p^a med $0 \leq a \leq s$, så vi har att

$$h(p^s) = \sum_{a+b+c=s} 1 = \binom{s+3-1}{3-1} = \binom{s+2}{2}$$

enligt urval med återläggning.

6) Sats 9.17 i Rosen säger att kongruensen ovan har en lösning om och endast om

$$(-1)^{\phi(p)/d} \equiv 1 \mod p$$

där $d = \text{sgd}(4, \phi(p)) = \text{sgd}(4, p-1)$.
$p = 8k+1$: Nu blir $\frac{p-1}{d} = \frac{8k}{4} = 2k$ vilket är jämnt, så $(-1)^{\phi(p)/d} \equiv 1 \mod p$.
$p = 8k+3$: Nu blir $\frac{p-1}{d} = \frac{8k+2}{2} = 4k+1$ vilket är udda, så $(-1)^{\phi(p)/d} \equiv -1 \mod p$.
$p = 8k+5$: Nu blir $\frac{p-1}{d} = \frac{8k+4}{4} = 2k+1$ vilket är udda, så $(-1)^{\phi(p)/d} \equiv -1 \mod p$.
$p = 8k+7$: Nu blir $\frac{p-1}{d} = \frac{8k+6}{2} = 4k+3$ vilket är udda, så $(-1)^{\phi(p)/d} \equiv -1 \mod p$.

7) Härma lösningen till första uppgiften på tentan som gick 2016-06-09; finns på kurshemsidan.