

TATA54 tenta 20240601, lösningskiss

Jan Snellman

May 14, 2024

Contents

1	Preliminärt	1
2	Gemensamm kod	2
3	Uppgifterna	2
3.1	U1	2
3.2	U2	2
3.3	U3	3
3.4	U4	3
3.5	U5	3
3.6	U6	3
4	Slut	3

1 Preliminärt

7 uppgifter, 3p för varje. Försöker täcka

- Kongruensräkning
- Hensellyft
- Kvadratisk reciprocite
- Kedjebråk
- Pell eller Pytagoranska tripplar

2 Gemensamm kod

```
def H_L_tree(f, p: int, r: int):
    vert = [(0,0)]
    for j in range(1,r+1):
        fj = f.change_ring(Integers(p^j))
        fzj = fj.roots(multiplicities=False)
        vert += [(z,j) for z in fzj]
    return DiGraph([vert,
                    lambda u,v: (u[1] == 1 and v[1] == 0)
                    or
                    ( (u[1] == v[1]+1) and ((u[0] - v[0]) % p^v[1] ==0) )
                    ])

```

3 Uppgifterna

3.1 U1

Hitta alla lösningar till

$$x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{27}$$

```
p = 3
k = 3
q = p^k
R.<x> = ZZ[]
f = x^5 + 2*x + 3
f.roots(Integers(q),multiplicities=False)

```

```
H_L_tree(f,p,k).show(layout='tree')
```

3.2 U2

Hitta alla rationella punkter på kurvan

$$x^2 - 7y^2 - 1 = 0$$

Parametrisera med lutning, rationell punkt (-1,0)

3.3 U3

Ange explicit två punkter på kurvan

$$(x^2 - 7y^2 - 1)(x^2 - 7y^2 + 1) = 0$$

vars koordinater är positiva heltal; beskriv alla övriga sådana.

Antingen lösning till Pell $x^2 - 7y^2 = 1$ eller till negativa Pell $x^2 - 7y^2 = -1$.

```
d = 7
cfd = continued_fraction(sqrt(d))
cfd
for j in range(15):
    co = cfd.convergent(j)
    y = co.denominator()
    x = co.numerator()
    print(j, co, x, y, x^2-d*y^2)
```

3.4 U4

Låt $\tau(n)$ beteckna antalet positiva delare till heltalet n . Visa att

$$\sum_{kn} \tau(k) = \prod_{j=1}^r \binom{a_j + 2}{2}$$

då n har primfaktoriseringen $n = \prod_{j=1}^r p_j^{a_j}$. Visa även att

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

3.5 U5

Låt p vara ett udda primtal. Visa att ekvationen

$$x^4 \equiv -1 \pmod{p}$$

är lösbar om och endast om $p \equiv 1 \pmod{8}$.

3.6 U6

Vad är den största multiplikativa ordningen av ett heltal modulo 99? Ange något sådant heltal av maximal multiplikativ ordning.

4 Slut