Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
1 juni 2024 kl 8-12
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 8p räcker för betyg 3, 11p för betyg 4, 14p för betyg 5.

μ är Möbiusfunktionen, ϕ är Eulers phi-funktion, så $\phi(n)$ räknar antalet multiplikativt inverterbara kongruensklasser modulo n. $\tau(n)$ räknar antalet positiva delare till heltalet n.

1) Hitta alla lösningar till
$$x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \mod 27$$
och bestäm **antalet** sådana lösningar modulo 81.

2) Vad är den största multiplikativa ordningen av ett heltal modulo 99? Ange något sådant heltal av maximal multiplikativ ordning.

3) Hitta alla rationella punkter på kurvan
$$x^2 - 7y^2 - 1 = 0$$
det vill säga alla lösningar (x, y) med $x, y \in \mathbb{Q}$.

4) Ange explicit två olika punkter på kurvan
$$(x^2 - 7y^2 - 1)(x^2 - 7y^2 + 1) = 0$$
vars koordinater är positiva heltal; beskriv alla övriga sådana punkter.

5) Låt $\tau(n)$ beteckna antalet positiva delare till heltalet n. Visa att
$$h(n) = \sum_{k|n} \tau(k) = \prod_{j=1}^{r} \binom{a_j + 2}{2}$$
då n har primfaktoriseringen $n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{a_j}$. Summan löper förstås över *positiva* delare till n.

6) Låt p vara ett udda primtal. Visa att ekvationen
$$x^4 \equiv -1 \mod p$$
är lösbar om och endast om $p \equiv 1 \mod 8$.

7) Visa att $n^{15} - n^3 \equiv 0 \mod 36$ för alla heltal n.